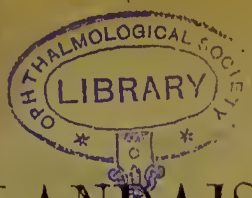




ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

ESSAI D'UNE EXPLICATION GÉNÉTIQUE DES MOUVEMENTS OCULAIRES,

PAR

F. C. DONDERS.

Le champ visuel avec ses signes locaux, d'une part, et les mouvements de l'œil, d'autre part, se sont développés sous une influence corrélative et se trouvent par conséquent entre eux dans la plus étroite liaison. Pour expliquer ces mouvements, pour se rendre compte de leur origine et de leur signification, une connaissance exacte de cette liaison est nécessaire. Nous chercherons à la découvrir pour chacun des types de mouvement. La première condition de succès, toutefois, est de nous former une idée claire des mouvements eux-mêmes. Je me propose donc de faire toujours précéder par l'étude des mouvements celle de leur origine; sans doute, je ne pourrai éviter de reproduire ainsi des choses connues, mais on verra aussi, je pense, qu'après les travaux récents de MM. van Moll [1]), Mulder [2]) et Küster [3]), et après les nouveaux

[1]) *Onderzoekingen gedaan in het physiologisch laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool*, 3e série, t. III, p. 39.

[2]) *Onderz. physiol. lab.*, 3e série, t. III, p. 118.

[3]) *Archiv für Ophthalmologie*, t. XXII, p. 149.

résultats obtenus par moi au sujet des mouvements de convergence et de torsion symétrique, un aperçu général des mouvements oculaires ne manquait pas d'opportunité.

De ce grand thème, je ne pourrai guère donner qu'une esquisse. Quelques-uns de mes lecteurs, toutefois, ne voudront pas se contenter des résultats, mais désireront aussi apprendre à connaître les faits par l'observation directe. Je me suis en conséquence posé pour règle d'indiquer chaque fois des expériences simples, qui mettront à même d'observer les phénomènes. Celui qui aura pris cette peine, n'éprouvera ensuite aucune difficulté à comprendre les instruments et les méthodes qui ont servi à les étudier rigoureusement, et dont je me borne à présenter une description sommaire. Les numéros cités à cette occasion ont rapport à la „Description des instruments du laboratoire physiologique et de l'école ophthalmologique d'Utrecht", qui se trouve dans les *Onderzoekingen* etc., t. IV, p. 1 et suiv.; pour plusieurs de ces instruments, je renvoie en outre à l'explication détaillée que j'en ai donnée dans des communications antérieures.

Il m'a paru convenable de suivre autant que possible dans mon exposition l'ordre historique, le seul qui montre les faits dans leur jour véritable.

Comparable, quant à ses mouvements, à une tête articulaire qui roule dans sa cavité, l'œil tourne autour d'un point à peu près fixe, situé très peu en arrière du centre de l'ellipsoïde sclérotique (Donders et Doyer). La droite menée du point fixé au centre de rotation est la *ligne de regard* ou *de fixation*. Partant du point de fixation principal, — lignes de regard horizontales dirigées droit en avant, la tête étant d'aplomb, — ses excursions s'étendent à environ 42° en dehors, 45° en dedans, 34° en haut, 57° en bas (Bloemert Schuurman).

Dans les mouvements des yeux il se manifeste une dépendance

mutuelle. Par une seule et même impulsion ils se portent tous les deux vers le haut ou vers le bas, à droite ou à gauche. Le plan qui passe par les lignes de fixation des deux yeux est le *plan de fixation*; l'ensemble des points sur lesquels elles peuvent se diriger forme le *champ de fixation*; la droite qui joint les deux centres de mouvement ou de rotation s'appelle la *ligne de base*.

Au point de vue de la fonction optique, nous distinguons immédiatement deux types de mouvement. L'un est relatif à la *vision de loin*, la tête étant d'aplomb, les lignes de fixation parallèles, l'accommodation relâchée. L'autre est la *vision de près*, la tête inclinée, le plan de fixation abaissé, l'accommodation tendue: la convergence aussi, même lorsqu'elle n'est pas symétrique, obéit pour les deux yeux à une seule et même impulsion. Tant en cas de convergence qu'en cas de parallélisme, les lignes de fixation peuvent parcourir le champ de fixation presque entier, et, dans les deux cas aussi, la tête et subsidiairement le tronc ont une tendance à se mouvoir dans le même sens et à restreindre ainsi l'étendue des mouvements oculaires.

Outre ces deux types, nous avons à distinguer deux formes de *torsion indépendante*, de rotation autour de la ligne de regard: la torsion *symétrique*, dans laquelle cette rotation a lieu en sens opposé pour les deux yeux, et la torsion *parallèle*, où la rotation s'opère pour les deux yeux vers le même côté. Dans chacune de ces rotations, l'impulsion est de nouveau commune aux deux yeux. Nous examinerons séparément ces quatre formes de mouvement.

I. LIGNES DE FIXATION PARALLÈLES.

A l'époque où je commençai mon étude des mouvements oculaires [1]), il était d'usage de partir de la considération des muscles, et de déduire de leur action présumée les mouvements

---

[1]) *Holländische Beiträge z. d. anat. und physiol. Wissenschaften*, t. I. pag. 105. Utrecht und Düsseldorf 1846.

de l'œil. Je compris que cette voie ne pouvait être la bonne, attendu qu'il n'y avait aucun motif d'admettre comme réellement existantes, supposé même que l'effet en pût être exactement prévu, toutes les combinaisons imaginables, et que par suite on courait toujours le risque de se perdre dans des fictions. Déterminer d'abord les mouvements, et ensuite s'enquérir des forces motrices, telle était la marche que je me proposai de suivre. Dans cette recherche, je fus très heureusement servi par la méthode dont nous devons l'idée et la première application à M. Ruete, la méthode des images consécutives. Le principe en est simple: une image consécutive linéaire nous montre, après l'exécution d'un mouvement, la direction du méridien qui, avant ce mouvement, avait reçu l'image linéaire.

Quant au chemin parcouru par la ligne de regard, il résulte de la détermination des deux points que l'œil fixe successivement. Autrefois on supposait que par là était donnée la position secondaire de l'œil, par rapport à la position primaire. C'était une erreur. Evidemment, nous devons connaître aussi la direction relative des méridiens avant et après le mouvement; nous devons savoir si dans ce mouvement l'œil a tourné autour de la ligne de fixation, et, le cas échéant, dans quel sens il a tourné.

Or, c'est ce que nous apprennent les images consécutives.

Des images consécutives se développent lorsque, après avoir fortement fixé un point pendant environ 20 sec., on laisse le regard, de préférence sur un plan d'un gris uniforme, *se reposer*, *immobile*: c'est là le point essentiel. Au bout d'une couple de secondes, apparaît alors l'image consécutive.

Sur une paroi verticale on suspend verticalement un ruban vivement coloré, puis on se place, la tête droite, à une distance de quelques mètres au moins, bien en face de ce ruban, et, un œil étant couvert, on fixe le regard de l'autre, dans la direction horizontale, invariablement sur un seul et même point du ruban. Il se forme de cette manière une image dans le méridien vertical ou primaire de la rétine, image dont l'impression consécutive se montre ensuite partout où le regard s'arrête sur la paroi. Qu'on

le fasse glisser le long d'une ligne horizontale: l'image consécutive coïncidera partout avec la verticale; qu'on le porte droit en haut ou en bas: l'image consécutive demeurera verticale sur le prolongement du ruban. Dans les deux cas, le méridien vertical reste donc vertical. Avec la position de la tête pour laquelle il est satisfait à ces conditions, et avec le regard horizontal dirigé perpendiculairement à la ligne de base sur le point de fixation principal, est donnée la position primaire. — Si l'on regarde à droite ou à gauche, et en même temps vers le haut ou vers le bas, on reconnaît que l'image consécutive, en cas de relèvement du plan de regard, incline du même côté sur la paroi, tandis qu'en cas d'abaissement du plan de regard elle penche du côté opposé. Le méridien vertical ne reste alors plus vertical.

Par ces expériences il était démontré que, partant de la position primaire et se mouvant soit directement en haut ou en bas, soit à droite ou à gauche, l'œil *tourne autour d'un axe perpendiculaire au plan qui renferme la ligne de fixation dans ses positions primaire et secondaire.*

Mais, autour de quel axe l'œil tourne-t-il lorsqu'il se meut vers le haut ou le bas suivant une direction oblique?

M. Listing émit la conjecture que la même loi s'appliquerait à ce cas, que l'œil tournerait encore autour d'un axe perpendiculaire au plan dans lequel est située la ligne de fixation dans ses positions primaire et secondaire. C'était là évidemment la solution la plus simple du problème. Il se passa du temps, toutefois, avant qu'on fût fixé sur l'exactitude de cette solution. Pas plus que mes recherches, dans lesquelles fut déterminée l'inclinaison des images consécutives de lignes verticales, celles de Meissner, de Wundt et de Fick n'avaient donné une réponse décisive. Ce fut Helmholtz qui plaça l'œuf sur sa pointe [1]). Il tendit par le point de fixation principal des rubans dans une direction oblique, et s'assura que, tout comme les images consécutives de rubans verticaux ou horizontaux, celles des rubans obliques progressent

[1]) *Archiv f. Ophthalmologie*, t. IX, p. 163.

dans leur propre direction, lorsque le regard suit la direction du ruban. Par conséquent le méridien, dans lequel est située l'image de ce ruban, conserve invariablement, pendant ce mouvement progressif, la même position; par conséquent, les lignes de fixation primaire et secondaire se trouvent dans le même méridien, et l'œil tourne autour d'un axe perpendiculaire à ce méridien, perpendiculaire aux directions primaire et secondaire de la ligne de fixation. Une démonstration plus claire ne saurait être fournie. Par elle, l'hypothèse de Listing fut promue à la dignité de loi.

Il est facile de voir que, d'après cette loi, pour tous les mouvements partant de la position primaire, les axes sont situés dans un seul et même plan, mené perpendiculairement à la ligne de regard par le centre de rotation, et appelé *plan principal des axes*. Le phénophthalmotrope simple (N°. 30; voir aussi: *Archives Néerlandaises* t. V, p. 55, 1870) met ce fait en évidence. Dans un anneau extérieur fixe peut tourner un second anneau, qui représente le plan des axes principaux: on peut en effet, au moyen de cette rotation, donner à un axe situé dans le second anneau toutes les directions possibles, et amener ainsi le globe oculaire artificiel de la position primaire dans toutes les positions secondaires. A ce globe est liée une croix, dont on place les bras, avant de faire mouvoir le globe., l'un verticalement, l'autre horizontalement: le mouvement exécuté, ces deux bras indiquent les positions qu'ont prises les méridiens vertical et horizontal. Déjà antérieurement j'avais reconnu que, n'importe par quel chemin la ligne de regard eût acquis une certaine direction, la position correspondante de l'œil (pour des lignes de regard parallèles) était invariablement la même. Ce résultat a été nommé par Helmholtz la loi de Donders.

Un instrument peu compliqué permet de contrôler les deux lois. Il se compose d'une petite tige courbe en bois, pourvue à une extrémité d'une embouchure, qu'on serre entre les dents, et à l'autre extrémité d'une bande colorée, mobile autour d'un axe qui doit passer par la centre de rotation de l'œil: si, après

avoir fixé le regard dans la direction de l'axe, on le fixe sur le sommet de la bande, on voit l'image consécutive dans le prolongement de la bande, quelle que soit la direction de celle-ci (loi de Listing), et quels que soient les détours par lesquels la ligne de regard a pu atteindre ce sommet (loi de D.) [1]).

La loi de D. nous met en état de déduire ultérieurement de la loi de Listing les mouvements qui conduisent d'une position secondaire à une autre.

Comment se font ces mouvements?

En premier lieu, il suit des lois de Listing et de D. que tous les axes, autour desquels l'œil tourne pour passer d'une position secondaire donnée à toutes les autres positions secondaires, sont de nouveau situés dans un seul et même plan: autant de positions secondaires de l'œil, autant de plans d'axes. Ces plans sont faciles à trouver. Le plan bissecteur de l'angle compris entre le plan principal des axes dans la position primaire et ce même plan dans la position où il est amené par un certain mouvement de l'œil, — ce plan bissecteur est le *plan secondaire des axes* pour la position que l'œil occupe maintenant [2]).

Pour trouver ensuite l'axe correspondant au mouvement d'une position secondaire déterminée b à une position secondaire déterminée b', on n'a qu'à chercher séparément, pour chacune de ces deux positions, les plans secondaires des axes, B et B': la droite suivant laquelle ces plans se coupent est l'axe cherché. En effet, en passant de b à b', l'œil doit tourner autour d'un axe situé dans le plan d'axes B; en passant de b' à b, autour d'un axe situé dans le plan d'axes B'; dans les deux cas, naturellement, autour du même axe: par conséquent autour de la droite suivant laquelle les plans B et B' se coupent.

---

[1]) Ce simple instrument pourra apprendre aussi jusqu'à quel point la loi de Listing reste vraie en cas d'inclinaison latérale stationnaire de la tête, inclinaison à laquelle est lié, comme on le verra plus loin, un mouvement de torsion parallèle.

[2]) Voir, pour la démonstration mathématique: Helmholtz, *Optique physiologique.* (traduite par Javal et Klein) Paris, 1867, p. 636.

La perpendiculaire au plan secondaire des axes est la ligne dite atrope (non tournante); quant à la ligne de fixation, elle n'est point perpendiculaire à ce plan, et par conséquent elle décrit, dans le champ visuel sphérique, non pas un grand cercle, mais un petit cercle, nommé par Helmholtz *cercle de direction.*

Il est facile de se former une idée de ces cercles de direction. Transportez-vous en pleine mer, le point de fixation principal droit devant vous à l'horizon, le point occipital diamétralement opposé derrière vous, et portez le regard, sans mouvoir la tête, d'une étoile à telle autre, que vous voyez directement. Dans ce passage, la ligne de regard décrit chaque fois un arc au ciel, et cet arc est une portion d'un cercle de direction. Si l'œil pouvait continuer à tourner autour du même axe, *la ligne de regard passerait par le point occipital:* tous les cercles de direction sont déterminés par cette propriété, d'où il ressort qu'ils ne sont des grands cercles que lorsqu'ils passent aussi par le point de fixation principal. Veut-on voir un cercle de direction dans l'espace? On n'a qu'à mouvoir le regard en divers sens à travers le disque brillant de la lune ou à travers le soleil: là où pose maintenant le regard, apparaît au ciel une image consécutive. Sur les cercles de direction une image consécutive linéaire glisse, coïncidant partout avec eux, exactement comme sur les méridiens qui passent par le point de fixation principal.

De concert avec M. Küster, j'ai construit un instrument, nommé cycloscope (N°. 48; voir aussi: *Onderzoekingen*, sér. 3, t. IV), qui rend sensibles aux yeux les cercles de direction et en outre tous les autres cercles qu'on a à distinguer dans le champ de regard. Il se compose d'un arc de cercle, sur lequel jaillissent en une série de points susceptibles d'être déplacés des étincelles d'induction, et d'une chaise pourvue d'un serre-tête, au moyen duquel la tête est maintenue dans la position primaire et de façon que le centre de rotation de l'œil coïncide avec le centre du cercle. En faisant tourner l'arc autour de différents axes, on peut lui donner la direction de tous les méridiens (qui passent par la ligne de fixation dans sa position primaire), de tous les grands cercles

qui dépendent de ces méridiens, de tous les cercles de direction, — et de plus, en le faisant monter ou descendre le long d'un support, celle de cercles parallèles. Un œil étant couvert et la tête bien immobile, si l'autre œil, prenant la position primaire, fixe à distance un petit disque lumineux (enduit de phosphore) dans une chambre d'ailleurs complétement obscure, on peut se représenter les points, où jaillit la succession rapide d'étincelles d'induction, comme des étoiles éloignées, et juger abstraitement de quelle direction les cercles formés par ces points donnent l'impression, tant lorsqu'ils sont vus indirectement du point de regard principal, que lorsqu'ils sont fixés. M. Küster [1]) a décrit cet appareil et fait connaître en détail les résultats qu'il en a obtenus. Ici je me bornerai à cette simple mention: tandis que, vus de la position primaire, les grands cercles paraissent concaves vers le point de fixation principal, et les cercles parallèles convexes vers ce même point, les cercles de direction se présentent comme des lignes droites dans l'espace et ils conservent aussi invariablement la même orientation lorsque le regard se meut en les suivant. On peut encore fixer sur l'arc de direction un ruban coloré et constater le glissement de l'image consécutive le long de cet arc. La signification de ces résultats pour l'origine des notions visuelles ressortira plus loin [2]).

Nous avons fait remarquer que, dans le mouvement d'une position secondaire à une autre, la ligne de regard n'est perpendiculaire à l'axe de rotation que dans le seul cas où elle passe par le point de fixation principal. Dans tous les autres cas, par conséquent, ce mouvement implique une rotation autour de la ligne de regard. Cette rotation autour de la ligne de regard, nommée *mouvement de roue* (*Raddrehung*) par M. Helmholtz, ne

[1]) *Archiv für Ophthalmologie*, t. XXII, p. 149; 1876.

[2]) Sans cycloscope, en se servant de la projection des lignes de direction et d'étoiles au ciel, M. Helmholtz (*Physiologische Optik*, p. 548 et suiv.) avait déjà trouvé en grande partie les résultats qui ont été décrits par M. Küster et qui maintenant, à l'aide du cycloscope, peuvent être rendus visibles à tous les yeux.

doit surtout pas être confondue avec la *torsion*, dont il sera question dans les sections III et IV de ce Mémoire. Elle est une simple conséquence des lois de Listing et de D. L'œil, en effet, passant d'une position secondaire à une autre, ne peut, sans mouvement de roue, prendre la position qu'il aurait obtenue s'il était parti directement de la position primaire. Loin de constituer une torsion véritable du globe de l'œil, ce mouvement de roue est donc la condition pour l'éviter. Au moyen du phénophthalmotrope composé (N°. 31; voir aussi: *Onderzoekingen*, 2e sér., t. III, p. 119), cela peut être rendu sensible en quelque sorte. On peut d'abord avec cet instrument, par rotation autour d'un seul axe suivant la loi de Listing, donner à la ligne de regard une certaine direction, par exemple oblique vers le haut, et constater la position correspondante de la croix. Ensuite on peut, partant encore de la position primaire a, donner de nouveau à la ligne de regard la même direction oblique vers le haut, en la faisant d'abord tourner à droite autour d'un axe vertical, puis en haut autour d'un axe horizontal, ou réciproquement, — chaque fois par conséquent autour d'un axe perpendiculaire à la ligne de regard, c'est-à-dire sans rotation autour de cette ligne. Mais on trouve alors que, dans le second cas, la croix qui indique la position des méridiens est dirigée autrement que dans le premier: pour obtenir une direction égale, une rotation autour de la ligne de regard serait nécessaire. Or, contrairement à ce que montre l'appareil, l'œil vivant, après avoir tourné d'abord à droite puis en haut (ou réciproquement), a de tous points la même position que s'il s'était porté directement à droite en haut, par rotation autour d'un axe unique. Les mouvements de l'œil diffèrent donc de ceux du phénophthalmotrope. La différence ne réside pas dans le mouvement de la position primaire a à la position secondaire b, mais dans celui de la position secondaire b à la position secondaire b', — et celui-ci se fait donc en réalité autour d'un axe ayant une composante sur la ligne de fixation. Cette composante donne le mouvement de roue de Helmholtz. Il se manifeste par un changement de direction des objets.

Soient, sur une paroi éloignée, quatre points 1, 2, 3, 4, représentant les quatre angles d'un carré. Les deux points inférieurs, 1 et 2, se trouvent dans le plan de fixation horizontal; 1 sera par exemple le point de fixation principal. Qu'on porte monoculairement le regard de 1 vers 2, vers 3, ou, suivant la diagonale, vers 4: aucun mouvement de roue ne s'opère, et les lignes qui joignent les points conservent leur direction. Mais si l'on porte le regard de 2 vers 4 ou de 3 vers 4 (ou réciproquement), on voit changer la direction des lignes (aussi celle des images consécutives de rubans tendus dans ces directions): c'est là l'effet du mouvement de roue de Helmholtz.



Nous connaissons à présent les lois de Listing et de D. avec toutes leurs conséquences. Pouvons-nous maintenant aussi rendre compte de leur origine?

M. Helmholtz a essayé de le faire du point de vue empiriste. En ce qui concerne la loi de D., il cherche à l'expliquer par le „principe de l'orientation la plus facile pour la position de repos de l'œil.” Lorsque, après avoir exécuté un mouvement, le regard revient à un objet fixé, on reconnaît qu'il est resté en repos à ce que son image tombe de nouveau sur les mêmes points de la rétine.

Mais, dit M. Helmholtz, même sans fixer de nouveau l'objet, nous voulons distinguer s'il est resté en repos pendant et après le mouvement. Cela, remarque-il, sera le plus facile si, quelle que soit la position de l'œil, tous les points d'une image se déplacent toujours de la même manière lorsque le regard se porte d'un objet à un autre. Cette condition, toutefois, n'est pas réalisable. Elle ne suppose rien moins que l'absence de tout mouvement de roue dans le passage d'une position secondaire à l'autre. Tout

ce qu'on peut atteindre, c'est que ce mouvement de roue soit aussi petit que possible, „que pour tous les mouvements infinement petits de l'œil, la somme des carrés des erreurs soit un minimum." Or, en appliquant l'analyse à la question, on trouve que, pour un champ de fixation circulaire (avec le point de fixation principal au centre), champ dont se rapproche celui où l'œil se meut d'ordinaire, cette condition de minimum est suffisamment remplie par la loi de Listing. Dans cette propriété, M. Helmholtz cherche alors la raison pour laquelle les mouvements ont su se plier à cette loi.

La circonstance que dans son explication M. Helmholtz s'appuie uniquement sur l'empirisme individuel, ne ferait pas pour moi matière à objection. Si, comme je le pense, il faut aussi tenir compte de l'expérience des générations précédentes, celle-ci a eu lieu dans les mêmes conditions que l'expérience individuelle, et l'explication pourrait donc rester la même. Du reste, M. Helmholtz lui-même n'est pas si exclusif. Pour ce qui regarde les mouvements, en effet, il reconnaît que „lorsque l'appareil musculaire de plusieurs générations consécutives s'est adapté aux besoins des individus, et que sa disposition s'est transmise de génération en génération, les torsions les plus convenables de l'œil doivent être devenues en même temps les plus faciles à exécuter, et cette circonstance doit faciliter singulièrement leur production" [1]). Ailleurs (p. 100) il concède que pour certaines innervations la voie peut être tracée par l'élément héréditaire. Et voudrait-il contester que dans la rétine, avec ses fossettes centrales et sa distribution nerveuse nettement caractérisée, se trouvent, sinon directement représentés les signes locaux, au moins déposées dès la naissance les conditions nécessaires à leur production dans un sens déterminé? M. Helmholtz a seulement cherché à montrer que nos représentations internes se laissaient expliquer par l'expérience individuelle,

[1]) *Optique physiologique*, trad. de MM. Javal et Klein, p. 629. Je dois faire remarquer ici que le mot *torsion*, dont MM. Javal et Klein se servent pour indiquer le mouvement de roue (*Raddrehung*) de Helmholtz, est appliqué par moi à un autre mouvement, celui appelé *Rollbewegung*, qui seul me paraît offrir une torsion véritable.

sans croire que le succès de cette tentative suffit à prouver la théorie empiriste. Au fond, empiristes et nativistes se tendent la main. Pour ces derniers, tels que je les comprends, l'expérience est, non moins que pour les premiers, le fondement de toute représentation: ils diffèrent seulement quant à la part qu'ils attribuent à l'expérience du phyle et à celle de l'individu. Mais, où est la mesure propre à déterminer cette part? Ce qui n'est pas manifeste au moment de la naissance peut être déjà donné virtuellement, dans ses conditions, et après la naissance, au cours du développement ultérieur, ces conditions et l'influence de l'expérience individuelle se fondent en un ensemble indivisible. On peut donc seulement demander ce qu'il y a de manifeste dès la naissance. Or si l'homme, plus que la généralité des autres animaux, plus que les poules et les cochons d'Inde par exemple, doit s'approprier beaucoup par l'expérience individuelle, l'expérience des générations antérieures s'accuse pourtant aussi chez lui de la manière la moins équivoque. Avec M. Engelmann, j'ai vu la fixation binoculaire, avec changement de convergence, chez un enfant mâle une heure à peine après la naissance (cas exceptionnel sans doute, mais pourtant bien constaté), et dans un cas de cécité congénitale absolue j'ai trouvé des mouvements oculaires parallèles dans toutes les directions. Le fait que chez les chiens, comme l'a montré M. Adamük dans mon laboratoire, on peut obtenir, par l'irritation de certains points des tubercules quadrijumeaux, les mouvements *communs* ordinaires des deux yeux, paraît aussi très significatif. Mais, je le répète, du fondement empirique individuel, donné par M. Helmholtz à son explication, je ne tire contre celle-ci aucun argument.

J'ai deux autres objections.

La première résulte de ce que le mouvement de roue, en général, nuit si peu à l'orientation. A priori, M. Helmholtz avait même cru que l'influence en pourrait bien être annulée par une certaine compensation. L'expérience, toutefois, montra qu'elle reste perceptible. Mais comment? En réalité, seulement par une sorte d'abstraction. Sans en avoir conscience, nous combinons les facteurs de notre représentation interne, et alors nous ne

remarquons rien du mouvement de roue. Ce n'est qu'en cherchant à nous figurer le déplacement de l'image, dégagé du mouvement sous l'influence duquel il s'est opéré, que nous voyons, à la périphérie du champ de fixation, changer la direction des lignes qui sont situées en dehors des méridiens et que nous suivons du regard. De la même manière, en cas de mouvement volontaire des yeux et surtout de la tête, le déplacement sur la rétine se laisse concevoir comme mouvement des objets. Bien plus: quand, partant de la position primaire, le regard se porte sur un objet vu très près de la périphérie, il est même impossible de réprimer la sensation que cet objet se rapproche du point de fixation principal. Et, remarquez-le, tout en voyant changer continuellement de direction (voir p. 411) une ligne verticale située de côté dans le champ de regard, nous la jugeons pourtant, n'importe où le regard s'y arrête, verticale; inconsciemment nous tenons compte de la position de l'œil. — En outre, il n'est guère admissible que lorsque le regard, après un mouvement, revient à l'objet précédemment fixé, l'image de cet objet, resté immobile, tombe de nouveau sur les mêmes points de la rétine. Tout mouvement de l'œil, en effet, se combine avec un mouvement de la tête, et celle-ci ne reprend pas exactement, après chacun de ces mouvements, sa position première. On peut d'ailleurs, à cet égard, produire intentionnellement une différence, en maintenant la tête, lors du retour du regard, dans la position où elle a été amenée par le mouvement: nous n'en savons pas moins, avec certitude, si l'objet est demeuré en repos. C'est un fait réellement remarquable que la sûreté avec laquelle, sans en avoir conscience, nous tenons compte, en les compensant, de tous les facteurs constants. En veut-on une preuve frappante? Qu'on suspende une petite tige à une faible distance, et qu'on la fixe binoculairement tout en inclinant lentement la tête, alternativement vers l'une et vers l'autre épaule. Il se produit alors, premièrement, le mouvement susdit de la tête et une rotation concomitante de l'œil autour de l'axe visuel; en outre, les lignes de regard se meuvent, par un mécanisme musculaire très compliqué, alterna-

tivement vers le haut et vers le bas, et en même temps à droite et à gauche. D'autre part, comme conséquence de ces trois sortes de mouvement, les images se déplacent sur la rétine, et non-seulement l'inclinaison mais aussi la grandeur des demi-images change, attendu que tantôt un œil et tantôt l'autre est plus éloigné de la tige. Et, en dépit de tout cela, nous reconnaissons la tige comme invariable de forme et de direction et comme fixée à sa place.

De tout ce qui vient d'être dit, je tire la conclusion que le mouvement de roue, même s'il était autre, et à la seule condition de rester constant, n'entraverait pas l'orientation. On peut même très bien concevoir que des déplacements apparents, dus au mouvement de roue, soient employés, sans qu'on en ait conscience, au profit de l'orientation.

Une seconde objection qui se présente à mon esprit, c'est que, pour la fin supposée par M. Helmholtz, je ne puis concevoir en action la cause génétique. Or c'est là une condition de rigueur: nous devons pouvoir introduire la notion de la fin dans l'effort plus ou moins conscient de l'individu, pour avoir le droit d'en expliquer la réalisation par la loi de l'exercice, et volontiers nous verrions encore donner en sus la preuve de fait de l'existence d'un pareil effort. Déjà la première loi m'offre quelque difficulté. Comment l'œil sera-t-il incité, quand le regard revient à son point de départ, à reprendre sa position première? Si elle est reprise, l'objet, comme le dit M. Helmholtz, *sera* reconnu resté en repos. Mais *pourquoi* sera-t-elle reprise? Voilà ce qu'on n'explique pas.

Moins satisfaisante encore, au point de vue génétique, est l'explication de la loi de Listing. Si le mouvement de roue est réellement perturbateur, la tendance à l'exclure entièrement, ou du moins à le compenser, se manifestera à chaque mouvement de l'œil. Mais quant à créer un type, impliquant la répartition la plus heureuse des perturbations et se faisant obéir sur toutes les trajectoires, je ne puis concevoir comment un effort, quel qu'il soit, pourrait y conduire. Et si l'aperception causale manque, l'explication peut-elle bien être considérée comme affranchie de cette téléologie réprouvée, qui se borne à invoquer une fin conjecturale?

C'est au point de vue téléologique pur que se place M. Hering [1]), relativement à cette question. Tout effet estimé favorable à la fonction visuelle est élevé par lui à la hauteur d'un principe, et il juge intéressant d'examiner comment ces principes peuvent être conçus unis de telle sorte que leurs collisions mutuelles inévitables soient réduites autant que possible. Il s'occupe en particulier de trois principes, „celui de l'*innervation la plus simple*, celui du *plus grand horoptère* et celui du *mouvement apparent évité*", mais il en a encore beaucoup d'autres en vue.

Au principe *de l'innervation la plus simple* s'applique sans doute la même remarque qu'au principe *du moindre travail musculaire* de M. Fick, à savoir, qu'il est nécessaire dans *tout* mécanisme vivant; celui *du plus grand horoptère* concerne exclusivement la vision binoculaire et n'exige, limité à la vision de loin, aucune forme de mouvement déterminée, mais seulement l'égalité des mouvements des deux yeux; celui *du mouvement apparent évité* ne diffère de celui de M. Helmholtz qu'en ce qu'il laisse hors de considération la distribution la plus favorable du mouvement de roue dans le champ visuel: M. Hering se contente de constater „que le principe du mouvement apparent évité est suffisamment satisfait par la loi de Listing, en tout ce qui intéresse les besoins pratiques". Nulle part il ne montre la moindre préoccupation d'une explication génétique.

L'idéal, dans une explication génétique, serait de suivre les mouvements, en corrélation avec le développement de l'organe visuel, à travers les différentes phases d'évolution du phyle. Cela, toutefois, est encore bien au-dessus de notre portée. Nous pouvons essayer seulement de nous former une idée générale de l'origine des mouvements, idée indépendante de toute considération de phase et applicable aussi bien à des formes antérieures qu'à un enfant de nos jours, même en supposant que celui-ci dût développer exclusivement par sa pratique personnelle la liaison entre la fonction optique et les mouvements oculaires. Une pareille idée générale

---

[1]) *Beiträge zur Physiologie*, p. 259. Leipzig 1861.

est possible, parce que dans nos spéculations il est permis de faire entièrement abstraction de la forme des organes moteurs, pour s'attacher aux seuls mouvements; car les mouvements ont déterminé le développement des organes moteurs, conformément aux lois de l'exercice et de l'hérédité, et la forme de ces organes est par conséquent secondaire.

L'origine de ce qu'on a appelé la *substance visuelle*, nous la cherchons dans l'action photo-chimique des ondes lumineuses sur la matière vivante en voie d'organisation. Des mouvements — au début presque purement accidentels — de l'organe de la vision dans sa forme encore la plus simple, nous déduisons les signes locaux qui sont inhérents à la substance visuelle. Une fois développés, ces signes purent à leur tour faire valoir leur influence sur les mouvements. Maintenant encore, comme il sera exposé plus loin, nous voyons les mouvements, en particulier les mouvements binoculaires, dominés par les signes locaux, qui montrent beaucoup plus de fixité que l'action toujours très plastique des muscles. Nous pouvons admettre qu'une partie déterminée de l'organe, probablement la partie centrale, se trouvait dans des conditions qui la rendaient apte à devenir plus sensible que le reste. Imaginons maintenant que, dans l'état habituel d'équilibre, une impression particulière se fit sentir dans la partie périphérique: la tendance à tourner la partie centrale vers la portion correspondante du champ visuel, — tendance aujourd'hui encore propre à l'organe visuel, — ne pouvait manquer de se produire. Indubitablement cela eut lieu tantôt dans une direction, tantôt dans une autre, et chaque fois l'organe revenait ensuite à sa position première, la position de repos relatif. A l'origine, ce mouvement n'avait rien d'assuré. Le but n'était pas atteint directement, mais en tâtonnant et par des détours. La rotation autour de la ligne de regard, aussitôt qu'il put être question de celle-ci, n'aura pas fait défaut non plus. Mais aucun détour et aucune direction de rotation n'avaient la prédominance, et par suite la moyenne, à laquelle devait conduire l'exercice, était le chemin le plus court, avec exclusion de toute rotation autour de la ligne

de regard. On comprend aisément qu'avec la régularité du mouvement devait augmenter la précision des signes locaux, et que celle-ci réciproquement pouvait être favorable à la régularité du mouvement. Ainsi était trouvé le chemin de la position primaire a à la position secondaire b. Le premier fondement était posé pour la loi de Listing: dans le mouvement de la position primaire a à b, et vice-versa, rotation de la ligne de regard autour d'un axe déterminé, sans rotation autour de la ligne elle-même. Pour achever alors de réaliser cette loi avec toutes ses conséquences, il ne fallait plus que la loi de D.: comment l'origine en doit-elle être conçue?

Nous avons supposé que l'œil passait de la position primaire a à la position secondaire b, pour revenir ensuite constamment en a, position de repos relatif. La tendance à en agir ainsi se laisse encore constater clairement. Cela a pu arriver un nombre incalculable de fois. Occasionnellement, toutefois, la circonstance a dû se présenter que, l'œil étant fixé sur β, l'impression d'un autre point périphérique β' ait attiré l'attention. Ce point pouvait être atteint en retournant de b en a et dirigeant alors de a l'œil sur β'. Initialement, c'est ainsi que les choses se seront passées. Mais, β' étant vu de a et reconnu quant à sa situation, il devait en résulter une comparaison avec l'impression de β' reçue de la position b. Dès lors, la tendance à arriver directement de b en b' ne pouvait tarder à se manifester. Bien des voies étaient ouvertes pour obtenir ce résultat. Sera-ce maintenant aussi, comme de a en b, la voie directe qui sera trouvée? Cette voie, ce serait la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan dans lequel sont situées les lignes de fixation dirigées sur β et sur β', — rotation comme si la direction b était la position primaire. Cette voie ne pouvait être trouvée. L'innervation, qui est déterminante pour une direction donnée, devait faire valoir ses droits. Par expérience était connue l'innervation sous l'action de laquelle l'œil est amené de a en b'. Pour arriver de b en b', c'était *absolument* la même innervation qui était exigée. Du moment que cette condition était exactement remplie, l'œil avait pris sous tous les rapports la

même position que s'il eût été dirigé de α sur β': ainsi se trouvait réalisée la loi de D. Cela impliquait, en outre, que dans le passage de *b* en *b'* l'œil avait tourné autour d'un axe faisant décrire à la ligne de regard un cercle de direction: les conséquences de la loi de Listing étaient satisfaites.

Du reste, si même on admet que, partant de β, β' ait été trouvé par tâtonnement, au lieu d'être déterminé par le sentiment intime de l'innervation nécessaire, et que par suite la position ne réponde pas exactement à la loi de D., — l'innervation voulue n'en aurait pas moins produit son effet au moment où l'on se proposait d'entreprendre le retour de *b'* en *a*, ce qui devait généralement avoir lieu. C'est comme si, enfonçant un clou à coups de marteau, et ayant d'abord frappé verticalement, on était ensuite conduit à porter le bras obliquement en haut, pour de là seulement atteindre le point de départ ordinaire: ce qui pourrait alors manquer à la position serait corrigé par l'idée du coup à frapper, et, après un exercice suffisant le long de ce chemin double, on arriverait sans doute d'emblée à la position correcte. Il en serait de même de l'œil, passant de *b* en *b'*.

Je crois avoir ainsi rendu suffisamment compte de l'origine de la loi de Listing, et en même temps de toutes ses conséquences, qu'on pourrait être tenté d'élever au rang de facteurs génétiques ou téléologiques.

Avec la première base de la loi de Listing, à savoir, le passage de *a* en *b* sans mouvement de roue, était acquise aussi la notion de la ligne droite, comme la plus courte distance entre deux points. Avec le mouvement de *b* en *b'*, suivant la même loi, mouvement où la ligne de regard décrit un cercle de direction, l'idée de ligne droite fut associée aussi aux cercles de direction. Le mouvement se fait par rotation autour d'un axe fixe, de sorte que le cercle de direction, tout comme la ligne droite, peut glisser sur lui-même; il se fait en outre sous l'influence d'une innervation constante, innervation absolument la même que celle par laquelle la ligne de regard, allant de *a* en *b'*, décrit une ligne droite: en voilà certes assez pour donner naissance à l'association susdite.

Nous comprenons maintenant aussi, ce que nous a appris le cycloscope, que le déplacement du regard le long de la ligne de direction doit encore contribuer à produire l'impression d'une ligne droite dans le champ visuel. Pour le déplacement le long d'une ligne tendue, c'est tout l'opposé. Fixée à la périphérie du champ de regard, elle paraît droite; mais si on la suit du regard (nous supposons qu'elle ne soit pas située dans un méridien), mouvement pendant lequel l'axe de rotation change à chaque instant et où la trace rétinienne ne peut par conséquent pas glisser sur elle-même, on la voit courbe. Il en est encore de même lorsque le regard est maintenu sur le point de fixation principal: à la périphérie du champ visuel, une ligne tendue, en dehors de la direction des méridiens, est alors, en cas d'abstraction suffisante, vue courbe, tandis qu'un cercle de direction est perçu comme ligne droite.

Ces perceptions se sont développées en corrélation avec la loi de Listing.

Dans ce qui précède, j'ai exposé aussi clairement que possible la loi de Listing et tâché d'en expliquer l'origine.

Cette loi est-elle maintenant vraie au sens tout à fait rigoureux? Il n'est pas même permis de le supposer. Nous construisons des appareils d'après un principe mathématique, et tout écart de ce principe est alors une imperfection, que nous cherchons à éviter. Mais les appareils vivants, qui n'ont pas été construits, mais qui se sont formés sous l'action continue de l'accommodation, se jouent des principes mathématiques et trouvent précisément leur perfection dans des déviations apparentes, qui, à raison de leur liaison avec les facteurs génétiques, méritent notre attention spéciale.

Quant aux mouvements avec convergence, pour ne pas parler des deux formes de torsion, il ne peut même, comme on le verra plus loin, y être question de la loi de Listing. Mais les mouvements avec parallélisme des lignes de fixation ne lui obéissent pas non plus tout à fait exactement. Si l'écart est ici minime, il est très cardinal, car il touche à l'essence de la loi: cette loi exclut toute rotation autour de la ligne de regard, dans le cas d'un mouvement

partant de la position primaire ou passant par cette position; or, en fait, le simple mouvement d'élévation ou d'abaissement du plan de fixation est accompagné de rotation autour de la ligne de regard. Ce fait n'est rien moins que la négation de la loi. Si par l'emploi de la méthode des images consécutives cette torsion peut rester cachée, elle se manifeste immédiatement quand on fait usage de celle des demi-images, qui est plus délicate et — tout aussi satisfaisante, lorsqu'on n'a pas à déterminer la position absolue, mais seulement la position relative des méridiens correspondants des deux yeux.

Qu'on fixe des deux yeux une ligne horizontale éloignée, par exemple le croisillon d'une fenêtre, vu sur le fond du ciel, et qu'on place devant un œil un prisme faible, l'arête en haut: le croisillon apparaît alors en deux demi-images, l'une au-dessus de l'autre, qui sont sensiblement parallèles; mais elles perdent leur parallélisme si la tête est fortement penchée en avant ou en arrière et que, par conséquent, le plan de fixation soit forcé de s'élever ou de s'abaisser. Lors du relèvement, les demi-images de l'œil droit et de l'œil gauche montent chacune du côté correspondant; lors de l'abaissement, c'est l'inverse. Ce changement de direction est le résultat d'une torsion symétrique: celle qui accompagne le relèvement du plan de regard, et qui se fait en un sens tel que les horizons s'abaissent au côté externe, nous l'appelons torsion *positive;* la torsion contraire, liée à l'abaissement du plan de regard, est dite *négative.*

Pour l'étude exacte de ces torsions, nous avons recours à l'Isoscope (N° 46; voir aussi: *Onderzoekingen*, 3e sér.; t. VIII). Cet instrument sert en premier lieu à mesurer les angles H et V des méridiens horizontaux et verticaux apparents. Les images rétiniennes d'une ligne horizontale sont situées dans les méridiens horizontaux *réels*. Si elles ne se projettent pas dans la même direction horizontale, les images rétiniennes qui se projettent bien ainsi sont situées dans d'autres méridiens, et ceux-ci sont alors les méridiens horizontaux *apparents*. L'angle H qu'ils forment est trouvé en mesurant l'angle de lignes qui, vues par les yeux respec-

tifs, sont tenues pour avoir une direction semblable et horizontale.

L'angle V des méridiens verticaux apparents est plus grand que H. Pour le voir, on n'a pas besoin de prisme. Il suffit de fixer le ciel dans la direction d'une verge mince verticale, qui alors se montre en deux demi-images, divergeant vers le haut. Ces demi-images sont croisées, car si on ferme l'œil droit c'est la demi-image gauche qui disparaît, et réciproquement (convergence insuffisante). La demi-image de l'œil droit penche donc à gauche, celle de l'œil gauche à droite; les méridiens verticaux apparents, au contraire, penchent, pour chaque œil, du côté homonyme: l'angle V est constamment positif. Comme il est toujours plus grand que H, ces deux écarts ne peuvent jamais être annulés simultanément par un mouvement de torsion; jamais, par conséquent, tous les méridiens de même direction des deux yeux ne peuvent avoir des points correspondants: c'est en cela que consiste l'incongruence des rétines, découverte par Helmholtz.

L'Isoscope, avec lequel nous mesurons V et H, se compose de: *a.* Deux cadres carrés, qui, tournant autour des centres de leurs tringles verticales, peuvent prendre la forme de losanges. Dans ces cadres sont tendus deux (ou plus de deux) fils, parallèles aux tringles susdites et y restant parallèles nonobstant toute rotation. Une échelle graduée, avec vernier, permet de lire la position. Si les fils sont un peu plus écartés que les yeux, ils montrent, en cas de parallélisme des lignes de regard, deux demi-images proches l'une de l'autre, et qu'il suffit de rendre à l'œil verticales et parallèles, en faisant tourner les cadres, pour pouvoir lire l'angle V. *b.* Deux cadres tout semblables, mobiles autour des centres de leurs tringles horizontales, et servant à la détermination de H.

A l'appareil des cadres est adapté un serre-tête, avec embouchure placée de telle sorte que, en la tenant entre les dents, on se trouve dans la position primaire, et qu'en outre la ligne de base des yeux coïncide avec un axe, autour duquel peut tourner, porté par deux bras, l'appareil des cadres (principe de Hering). En suivant alors le cadre des yeux, le plan de fixation se relevant ou s'abaissant, on peut déterminer l'influence du changement de direction sur V et H.

Il a été reconnu de cette manière, que la torsion est à peine appréciable dans la partie du champ de regard habituellement employée, et que seulement aux limites de ce champ elle prend une valeur relativement assez forte. Il n'en importe pas moins de nous enquérir de son origine, car ce sont précisément les petites déviations qui dévoilent souvent les causes efficientes. A tort on a cherché une explication dans le jeu des muscles, lesquels, en relevant le plan de regard, produiraient concurremment une torsion; on oubliait que c'est l'innervation, volontaire, réflexe ou automatique, qui a fait devenir les muscles tels qu'ils sont, et que par conséquent, pour expliquer la torsion, il faudrait rendre compte de l'innervation. Il m'est impossible de la rattacher au développement des lois de D. et de Listing. Serait-ce dans la convergence qu'il faudrait en chercher l'origine?

II. CONVERGENCE.

Il y a convergence lorsque les lignes de fixation se rencontrent en un point qui ne se trouve pas à une distance infinie, qui peut se rapprocher jusqu'à quelques centimètres des yeux. Si le point est situé dans le plan médian, la convergence est symétrique; s'il est en dehors de ce plan, elle est asymétrique. Le plan de fixation, en cas de convergence, peut avoir une position quelconque, mais ordinairement il est dirigé vers le bas, et cela en vertu d'une tendance déterminée, qui a dû se développer spontanément, parce que les objets rapprochés sont en général situés plus bas que les yeux, et que l'inclinaison de la tête ne compense cette situation qu'en partie.

Pour la vue de loin, avec lignes de fixation parallèles, la vision binoculaire est une condition assez indifférente. Elle n'acquiert une grande importance que pour la vue de près, avec lignes de regard convergentes, cas où les images perspectives formées sur les deux rétines diffèrent et se combinent en une image stéréoscopique. Il ne peut plus être question ici de la loi de Listing. Les mouvements sont dominés par les exigences de

la vision binoculaire, et c'est aussi dans celles-ci que nous trouverons la raison d'être de l'incongruence des rétines.

Pour une même direction de la ligne de regard, l'œil a, sous l'influence de la convergence, une autre position; il est facile de s'en convaincre par une expérience très simple. Tenons une ligne horizontale, longue d'au moins 60 mm., à 25 cm. au plus des



yeux, et considérons-la avec lignes de fixation parallèles: les demi-images de l'œil droit et de l'œil gauche ont alors la même direction et forment, reliées l'une à l'autre, une ligne continue de longueur double. Rien ne change à cet égard, quand, faisant mouvoir les yeux à gauche et à droite, on dirige alternativement l'œil droit sur *a* et l'œil gauche sur *a'*. Mais si l'on regarde par convergence, de manière que *simultanément* l'œil droit soit dirigé sur *a* et l'œil gauche sur *a'*, les demi-images cessent d'être parallèles, et forment en se joignant une ligne brisée, à sommet tourné vers le haut. La convergence dans le plan horizontal s'accompagne donc de torsion (toujours *positive*), phénomène qui ne se produit pas lors du mouvement avec lignes de fixation parallèles, dans ce même plan.

A l'aide des images consécutives on peut également se convaincre de la torsion qu'entraîne la convergence (Volkmann et Welcker, Hering). Les deux yeux étant ouverts, mais l'un couvert par un petit écran, on fixe dans la position primaire, sur un ruban vertical, un point marqué, derrière lequel la paroi grise porte également une marque (sur une ligne verticale mince); puis, le ruban ayant été enlevé vivement, on continue à fixer cette marque: si cela a lieu sans que la direction des lignes de regard change, l'image consécutive se montre verticale (en coïncidence avec la ligne verticale), comme l'était le ruban; mais si cela se fait avec convergence, par une rotation volontaire de la ligne de regard derrière l'écran, l'image consécutive s'écarte distinctement, au moins chez moi, de la position verticale. — Cette expérience demande un peu d'exercice. La suivante offre peut-être moins de

difficulté. Aux deux côtés d'un ruban coloré vertical se trouve une ligne verticale noire. On fixe, de nouveau dans la position primaire, un point marqué du ruban, puis, le ruban enlevé, on fait converger assez fortement les lignes de regard, dans le plan horizontal, pour qu'elles se fixent par entre-croisement sur les deux lignes verticales: ces lignes s'entre-croisent alors dans le point de fixation primitif, et l'image consécutive colorée apparaît simple entre les lignes noires divergentes, formant ainsi un angle avec les images des lignes verticales, tant avec celle de l'œil droit qu'avec celle de l'œil gauche. Il est facile de voir que l'entre-croisement des lignes, au point fixé, suffit à lui seul pour prouver, d'après la méthode des demi-images, le changement de direction des méridiens; mais j'ai voulu réunir dans une seule et même expérience les deux méthodes, parce que M. Bloemert Schuurman (de même que M. Hamer) avait très bien pu observer les déviations dues à la convergence par la méthode des demi-images, mais non par celle des images consécutives, et avait cru en conséquence devoir contester à la première toute force démonstrative [1]). Les résultats obtenus par ces deux observateurs ne prouvaient toutefois qu'une chose: c'est que, sous le rapport de la délicatesse, la méthode des images consécutives doit céder le pas à celle des demi-images.

Ainsi que je l'ai fait remarquer, le mouvement de torsion par convergence est constamment positif, mais, quant au degré, il offre de grandes différences chez des individus différents. M. Helmholtz n'a obtenu pour une convergence à 21 cm. que 0°,17, M. Volkmann à 30 cm. déjà 1° sur chaque œil. M. Hering [2]) a trouvé pour une convergence de 20° sur 60° une torsion de 3°26′, et, d'après son calcul, M. Meissner avait pour 41° de convergence une torsion de 2°17′, M. von Recklinghausen pour une convergence de 21° sur 46° une torsion de 1°40′. M. Dastich seul, à

[1]) *Vergelijkend onderzoek der bewegingen van het oog bij emmetropie en ametropie*, Utrecht, 1863.

[2]) *Die Lehre vom binocularen Sehen*, 1868, p. 92 et suiv.

ce que nous apprend M. Helmholtz, n'avait pu constater absolument aucune influence. Mes recherches ont fait reconnaître, sans exception, une rotation *positive*, très faible chez quelques-uns, tels que MM. Van Moll, Engelmann et Küster, mais allant chez moi jusqu'à 5°, et ayant chez vingt autres, pour une convergence facile à atteindre, une valeur de 0°,6 à 2°,75, en moyenne de 1°,8, sans distinction entre myopes et emmétropes (voir appendice I), — le tout pour la torsion d'un seul œil.

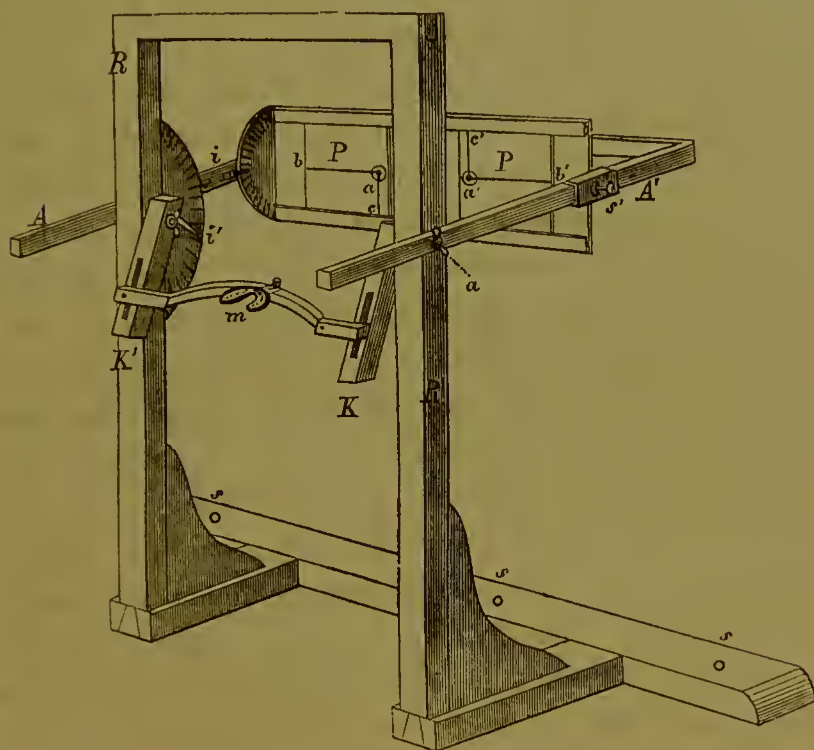
Cette influence de la convergence a été traitée de simple écart de la loi de Listing. Mais ceci n'en éclaire aucunement la signification. Au lieu de parler ici d'écarts, nous devons nous efforcer de découvrir les lois propres qui régissent le mouvement convergent.

Puisque, dans la position primaire, les lignes de regard parallèles se meuvent dans le plan horizontal sans torsion, c'est-à-dire se meuvent autour de l'axe vertical, la question est de savoir si, pour les mouvements de convergence, il n'y aurait pas une inclinaison du plan de regard telle, que ces mouvements s'y exécutent également autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

Pour mes propres yeux, j'ai examiné cette question attentivement. L'angle H de mes méridiens horizontaux apparents est relativement grand (le matin en moyenne 0°,7), et ils ne deviennent parallèles que lorsque le plan de fixation s'abaisse de 45 à 50°. Si je converge avec cette inclinaison, il se produit une torsion négative. Mais si je donne au plan de regard une inclinaison d'environ 38°, les susdits méridiens sont et restent, dans de larges limites de convergence, sensiblement parallèles. Cette inclinaison peut donc être envisagée comme *position primaire* pour la convergence symétrique, en tant que, avec cette inclinaison, les demi-images d'une ligne horizontale glissent parallèlement l'une sur l'autre lorsque la convergence croît ou décroît. Pour les déterminations exactes, on peut se servir de l'Isoscope, ci-dessus décrit. Mais on atteint tout aussi bien son but, — et même, comme on le verra, un second en sus, — avec un instrument plus simple, qui peut être nommé Horoptéroscope (fig. 1).

Il se compose d'une tablette en bois rectangulaire P P, longue

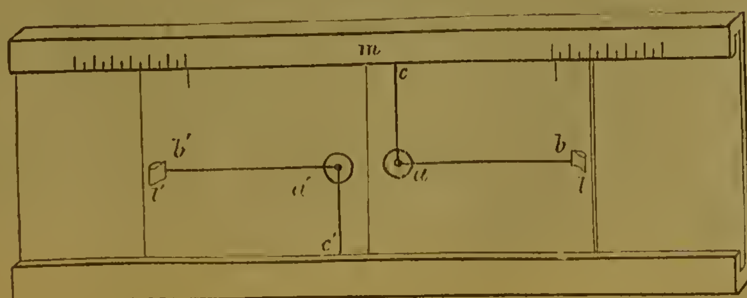
Fig. 1.



de 38 cm. et haute de 14 cm., mobile le long de deux bras A A′, sur lesquels on peut lire la distance de la tablette aux yeux, et qui tournent autour de l'axe *a*. La tête est fixée par l'embouchure *m*, dont la chape tourne, au moyen des deux bras courts K K′, autour du même axe *a*; la chape et l'embouchure se placent de telle sorte que la tête prenne rigoureusement la position primaire P et que l'axe *a* coïncide avec la ligne de base des yeux.

Le cadre R R′, sur lequel les bras tournent, est fixé par des

Fig. 2.



vis *s s s* sur une table. — Sur la tablette de bois sont appliquées, mobiles dans des coulisses, deux feuilles de carton, qui peuvent se joindre sur la ligne médiane *m* (voir fig. 2), et qui portent respectivement les lignes horizontales *a b* et *a' b'* et les lignes verticales *a c* et *a' c'*. En tirant les cordons *l* et *l'*, on éloigne les deux feuilles l'une de l'autre, et la division fait alors connaître l'écartement des deux points de fixation *a* et *a'*. — La tablette de bois est mobile autour d'un axe situé près de la vis *s'* et passant par les lignes horizontales *a b* et *a' b'*. En cas de position verticale, l'index *i* de la graduation qui est adaptée au côté gauche de la tablette, perpendiculairement à sa direction, marque 0°. — L'index *i'*, sur la graduation fixée au cadre, marque l'inclinaison des bras A et A', et par suite l'angle *s* que le plan de regard forme avec la position primaire horizontale, lorsqu'on fixe *a* et *a'*.

Les points *a* et *a'* peuvent être fixés avec ou sans entre-croisement. S'il n'y a pas d'entre-croisement, et que ces points soient à la même distance l'un de l'autre que les centres de rotation des yeux (environ 64 mm.), les lignes de fixation sont parallèles; s'il y a entre-croisement, le point de convergence se trouve à la demi-distance de la tablette de bois: tous les degrés de convergence peuvent être obtenus, en faisant glisser ou bien la planchette sur ses bras, ou bien les feuilles de carton sur la planchette. Lorsqu'on fixe *a* et *a'*, soit avec soit sans entre-croisement des lignes de regard, deux demi-images se raccordent en une ligne unique, et on peut donner au plan de regard une inclinaison telle, que ces demi-images forment ensemble une ligne droite. On trouve ainsi la *position primaire* pour le mouvement symétrique de convergence et de divergence. Je la distinguerai, sous le nom de *position primaire* C, de la position primaire pour les lignes de regard parallèles, laquelle peut alors être désignée comme position primaire P. Entre ces deux positions l'analogie n'est pas complète, en ce sens que, de la seconde, les lignes de regard parallèles se meuvent, sans mouvement de roue, dans tous les méridiens, tandis que, pour la première, les mouvements sont limités au plan de fixation.

Si le plan de fixation se relève au-dessus de la position primaire C, il se produit, comme le montre la direction des demi-images juxtaposées, une *torsion positive*; si le plan s'abaisse au-dessous, il y a *torsion négative*: — dans les deux cas, par conséquent, torsion dans le même sens que pour les lignes de regard parallèles. Plus la convergence est forte, plus la torsion augmente rapidement: aussi, avec de fortes convergences, l'inclinaison voulue peut-elle être obtenue d'une manière plus précise qu'avec des convergences faibles.

Chez toutes les personnes soumises à l'examen, j'ai trouvé, pour la position primaire C, le plan de regard dirigé plus bas que pour la position primaire P: désignons par *s* l'angle que ces plans forment entre eux. Chez quelques-uns il est petit, chez d'autres il est considérable; chez moi il s'élève à 40° (voir appendice 2). La différence est en rapport avec la valeur de la torsion propre à la convergence dans la position primaire P, car cette torsion est naturellement d'autant plus grande que l'angle *s* est plus grand, c'est-à-dire, que P est plus élevé au-dessus de C. Chez M. Volkmann *s* aura donc été assez grand, chez M. Helmholtz très petit, et chez M. Dastich égal à 0°. Un cas de ce genre (M. Grossmann) s'est aussi présenté à moi. Chez la plupart des individus, *s* est de 20° à 30°, et constamment, comme je l'ai déjà dit, dans le même sens.

J'ai parlé d'un second but, qui se laisse atteindre au moyen de l'horoptéroscope. A cela servent les deux lignes verticales *a c* et *a′ c′* tracées sur la tablette de bois, l'une vers le haut, l'autre vers le bas (voir fig. 1 et 2). Lorsque, dans l'expérience, les traits horizontaux s'unissent en une ligne droite, les demi-images des traits verticaux nous montrent l'incongruence des rétines: elles s'unissent, la tablette de bois étant verticale (*i* sur 0°), en une ligne brisée. Si alors on fait basculer la tablette sur son axe, tandis que les lignes de regard sont parallèles et par conséquent dirigées perpendiculairement à l'axe, la ligne des demi-images reste brisée. Mais si les lignes de regard convergent sous un angle sur cet axe, la ligne brisée devient une ligne droite quand la tablette incline en arrière, en d'autres termes, les méridiens verti-

caux apparents se coupent dans le plan incliné. Le mouvement de bascule doit avoir d'autant plus d'amplitude que l'incongruence est plus grande, d'autant moins que la convergence est plus forte. Sur le plan de la tablette on voit alors la ligne horizontale et la ligne verticale se croiser à angles droits, et les demi-images d'autres lignes, qui partent de *a* et *a'* sous des angles égaux, respectivement vers le haut et vers le bas, apparaissent également comme des lignes droites. Nous avons donc trouvé un plan qui peut être appelé plan horoptérique, quoique, au sens mathématique rigoureux, il ne mérite pas ce nom. L'angle *s* reste le même quelle que soit la convergence; l'angle de bascule α diminue à mesure que la convergence est plus forte. Cette diminution est accusée par l'expérience; mais l'angle α se laisse aussi calculer pour toutes les convergences, l'incongruence étant donnée, suivant la formule

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,m}{sin\,c},$$

où m est le demi-angle d'incongruence $\frac{1}{2}(V—H)$, et c le demi-angle de convergence.

Par l'observation j'ai trouvé, pour des convergences à 1000, 500, 250 et 125 mm., environ $\alpha = 37°$, $18°$, $12°$ et $5°$, ce qui concorde assez bien avec les résultats du calcul, en prenant pour base une incongruence de 2°,5 (voir appendice 2).

Ce plan dit horoptérique a une grande importance. Lors de l'observation, le point de convergence se trouve entre les yeux et la tablette; mais, après l'observation, on peut rapprocher la tablette jusqu'au point de convergence, et fixer ainsi directement des deux yeux les divers points de ce plan. A l'aide d'un prisme faible, on se convainc alors que, dans le cas de convergence symétrique sous l'angle *s*, les demi-images de lignes tracées dans différentes directions sur ce plan par le point de fixation se recouvrent, et que le point de fixation peut se déplacer sur ce plan entre certaines limites, sans apporter dans cette superposition un trouble appréciable. Le déplacement latéral, il est vrai, occasionne,

comme nous l'apprennent les images consécutives, un mouvement de roue (dans le même sens que celui qui en cas de parallélisme des lignes de fixation accompagne le déplacement latéral du plan de fixation abaissé); mais, comme ce mouvement est le même pour les deux yeux, le plan ne s'écarte pas beaucoup de l'horoptère.

On peut aussi placer sur la tablette une feuille imprimée, et on trouve alors que celle-ci se laisse lire très facilement. La pose devient encore plus naturelle si, au moyen de la chape, dont l'axe coïncide avec la ligne de base oculaire, on incline la tête de quelques degrés en avant, en laissant le plan de regard s'abaisser d'autant. C'est effectivement cette attitude que nous choisissons de préférence pour lire et écrire dans les circonstances ordinaires. Les demi-images de la ligne que nous lisons trouvent de cette manière leur horoptère dans les horizons rétiniens parallèles, et pendant que les lignes de regard, par rotation autour d'un axe invariable (et avec innervation persistante des mêmes muscles), s'avancent sur la ligne imprimée, les mots voisins sont déjà vus indirectement avec autant de netteté que possible, et le passage régulier à la ligne suivante est assuré. La plupart des personnes remarqueront, en outre, que, lorsque la convergence augmente, elles font involontairement basculer la feuille de façon à en diminuer l'obliquité sur le plan de fixation, ce qui prouve déjà la tendance à amener aussi l'étendue verticale de la feuille autant que possible dans l'horoptère. Si elles tiennent la feuille à la main, elles relèvent en même temps la tête, sans changer l'inclinaison relative du plan de fixation; si le livre est posé sur un plan incliné, elles penchent la tête, mais toujours elles atteignent ce résultat, que le plan de fixation se rapproche davantage de la position perpendiculaire à la feuille. La conservation de l'horoptère est encore favorisée par la circonstance que les mouvements des yeux sont assez bornés, et ceux de la tête relativement étendus. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à tenir une baguette, un crayon par exemple, entre les dents, de manière à fixer d'un seul œil, en rasant la pointe du crayon, une lettre au milieu de la feuille: si alors on porte la vue vers le commencement ou la fin de la ligne, ou vers

le haut ou le bas de la page, le crayon reste en arrière de la ligne de fixation, mais seulement un peu: ce peu représente le mouvement des yeux [1]). En essayant de lire avec des mouvements étendus de la ligne de fixation, sous une inclinaison inaccoutumée, et surtout si les lignes d'impression ont une direction oblique, non compensée par la position de la tête, on s'assurera facilement que dans ces circonstances la lecture rencontre des difficultés, tant à cause de la non-correspondance des demi-images, que par suite de la rotation continuelle autour d'axes instantanés, à laquelle les yeux sont astreints.

Nous avons maintenant à chercher sous quelles conditions le type du mouvement de la convergence s'est développé.

En premier lieu, il s'agit d'expliquer l'origine de la convergence elle-même et de la position primaire C qui s'y rapporte.

La vision par convergence suppose la vision binoculaire. Pour la vision binoculaire la première condition est celle-ci: que certains points privilégiés des deux rétines (dans nos yeux les *fossettes centrales*) reçoivent des images des mêmes objets. Cela exige une relation déterminée entre la position des deux yeux. Chez l'enfant nouveau-né, cette relation est déjà donnée *à peu près* avec l'innervation concordante des muscles, et elle se maintient dans les mouvements oculaires parallèles qu'on observe peu de temps après la naissance, sous l'influence d'innervations communes aux deux yeux. Or nous savons avec quelle force se manifeste plus tard la propension à accommoder les mouvements à cette première condition de la vision binoculaire (entre autres, dans les expériences avec des prismes). Nous en concluons qu'une certaine tendance à pareille accommodation était aussi déjà innée, et cette tendance dut conduire, pour des muscles normaux, à déterminer encore plus *strictement*

---

[1]) De concert avec M. Ritzmann, j'ai construit un instrument qui permet de déterminer la part des mouvements de la tête et des yeux dans le changement de direction de la ligne de regard. Voir *Archiv für Ophthalmologie*, t. XXI, pag. 131, et *Onderzoekingen*, t. IV.

et plus *exactement* la direction nécessaire des lignes de fixation.

Si nous essayons de pénétrer plus avant dans la question, nous sommes arrêtés par l'imperfection de nos connaissances en ce qui touche la vision binoculaire chez les différentes classes d'animaux. Nous savons qu'avec la possession de deux yeux la vision binoculaire n'est pas encore donnée, que, là où elle existe, les points privilégiés peuvent avoir une situation assez excentrique, et que chez quelques oiseaux on trouve deux paires de points privilégiés, les uns plus centraux pour la vision particulière à chaque œil, les autres plus excentriques pour la vision binoculaire (Henri Müller). Mais quant aux formes de passage entre la vision monoculaire double et la vision binoculaire, nous sommes dans une ignorance presque complète [1]). Chez l'homme, nous rencontrons ce fait remarquable que, lorsque par le strabisme divergent la vision binoculaire est supprimée, les deux rétines peuvent acquérir une indépendance absolue, de sorte que chaque œil a son champ visuel propre, où, dans toutes les positions, il est complétement orienté. Ce fait conduit à supposer que, réciproquement, la vision binoculaire est une forme secondaire, née de la vision monoculaire double. La lutte des deux yeux, qui se fait encore sentir si distinctement dans la vision binoculaire, semble aussi plaider en faveur de cette hypothèse. La vision binoculaire pourrait alors commencer par l'apparition d'une seconde paire de points privilégiés, qui insensiblement se rapprocheraient de ceux servant à la vision monoculaire double, pour se confondre finalement avec eux. Mais, je m'arrête, ne voulant pas m'engager davantage dans la voie spéculative, tant que nos connaissances anatomiques et physiologiques sont encore si défectueuses sur ce point. Quoi qu'il en soit, les points privilégiés de la vision binoculaire ont dû, pour une position donnée des organes visuels, se développer en corrélation avec la situation

[1]) Dans son ouvrage classique: *Vergleichende Physiologie des Gesichtssinnes*, Leipzig 1826, p. 142, Joh. Mueller a publié un tableau comparatif très intéressant, sur les différences dans la divergence des yeux (ou plûtot des axes des orbites) chez les mammifères.

d'images rétiniennes semblables, et la tendance à recevoir toujours sur ces points des images correspondantes a dû assujettir les mouvements aux exigences de la vision binoculaire. Par rapport aux objets éloignés, les lignes de fixation pouvaient être parallèles, et c'est ainsi que se développa la coordination des mouvements oculaires parallèles. Mais, en passant des objets éloignés aux objets rapprochés, les lignes de regard devaient converger, et le développement du second type, celui des mouvements symétriques de convergence et de divergence, en fut le résultat. Surtout lorsqu'un objet se rapprochait ou s'éloignait lentement, la tendance à faire converger ou diverger les lignes de regard devait être éveillée d'une manière très graduelle. Et ici, comme partout ailleurs, l'effort exerça une action créatrice sur l'innervation et sur le tissu contractile.

Les objets rapprochés en général, — et notamment les parties de notre corps, les bras et les mains, qui, conjointement avec les objets palpés, jouent évidemment le rôle principal dans l'acte de déterminer le plan de fixation, — sont situés plus bas que les yeux. Si donc, ici comme partout, le mouvement se partagea entre la tête et les lignes de fixation, le plan de fixation dut s'abaisser et le type de la convergence se développer en rapport avec la position inclinée de ce plan.

Autour de quel axe tourneront maintenant les yeux, lorsque, par suite du rapprochement ou de l'éloignement des mains et des objets, les convergences augmenteront ou diminueront? Si nous supposons que, par le mouvement avec lignes de regard parallèles, les points correspondants des horizons rétiniens s'étaient déjà formés, ceux-ci purent régir en quelque sorte dès leur début les mouvements symétriques de convergence et de divergence, et la tendance à faire correspondre à ces horizons des demi-images semblables et à faire glisser sur elles-mêmes pendant le mouvement les lignes horizontales, dut avoir pour effet la rotation autour d'un axe perpendiculaire aux méridiens horizontaux, c'est-à-dire, perpendiculaire au plan de fixation. Mais il est probable que dès l'origine de la vision binoculaire la convergence commença à se développer, et alors nous avons de nouveau à nous représenter

l'organe cherchant la voie la plus simple, et à nous enquérir, comme ci-dessus (p. 417), de la moyenne de tous les détours, laquelle moyenne ne pourra encore être autre chose que la rotation autour de ce même axe, dont nous venons de parler. Ce qui vient à l'appui de cette seconde interprétation, c'est la circonstance que, pour la plupart des yeux, les horizons ne correspondent parfaitement que lors d'un certain abaissement du plan de fixation. Il faut considérer, en outre, que la convergence et la divergence ont lieu exclusivement dans le plan de fixation, et que les horizons rétiniens sont sensiblement situés dans ce plan, non-seulement pour la position primaire C, mais pour toutes les inclinaisons du plan de regard, — celles-là seules exceptées, avec lesquelles la convergence et la divergence se présentent très rarement. Ce sont donc surtout les mouvements symétriques qui déterminent les signes locaux des horizons correspondants, et qui en outre font de la ligne horizontale, comme on le verra encore mieux plus loin, la vraie base de la vision stéréoscopique.

Par ce qui précède, je crois avoir rendu suffisamment compte de l'origine de la convergence elle-même et de la position primaire correspondante C, avec ses mouvements symétriques autour d'axes perpendiculaires au plan de fixation. L'existence de grandes différences individuelles, sous ce rapport, n'a pas de quoi nous étonner; car, sans nul doute, les conditions sous lesquelles s'est développée la position primaire C varièrent aussi beaucoup, tant dans la race que chez l'individu.

Nous avons commencé par montrer que dans la position primaire P les mouvements symétriques sont accompagnés de torsion, et réciproquement nous trouvons dans la position primaire C un mouvement de roue associé aux mouvements latéraux avec lignes de fixation parallèles. Il est donc évident que les mouvements symétriques dépendent d'une innervation particulière. Cela résulte aussi de ce que, dans l'état normal, nous ne pouvons pas, à beaucoup près, tourner aussi fortement vers le plan médian les deux lignes de regard convergentes, qu'il n'est possible de le faire pour chaque œil en particulier, avec lignes de regard parallèles.

Puis la faculté de convergence, ou ce que l'on nomme le pouvoir de fusion, est quelquefois altérée à un haut degré, sans que la rotation vers le plan médian, alternativement de l'un et de l'autre œil, ait en rien souffert. Enfin, une dernière preuve de la spécificité de l'innervation qui préside à la convergence, c'est qu'un effort de l'accommodation s'y trouve associé.

Nous nous représentons donc que cette innervation, quelle que soit la position des lignes de regard, s'ajoute d'une façon indépendante à l'innervation qui a produit cette position, et qu'elle entre chaque fois en jeu avec la tendance à voir de près. Or, on peut démontrer que l'action musculaire, qui en depend, détermine lors du relèvement du plan de regard une torsion positive, et lors de l'abaissement de ce plan une torsion négative, torsions d'autant plus fortes que le plan de regard s'est écarté davantage de la position primaire C et que le degré de convergence est plus élevé [1]). Le phénomène de la torsion paraît ainsi

[1]) Dans une occasion ultérieure, en traitant de l'action musculaire, j'espère mettre en pleine évidence l'assertion ci-dessus. Provisoirement je me bornerai aux considérations suivantes. Dans la position primaire P, le muscle droit interne fait tourner l'œil autour d'un axe perpendiculaire au plan de fixation. Dans la position primaire C, ce muscle seul ne peut plus mouvoir l'œil autour d'un pareil axe, car il a cessé de se trouver dans le plan de fixation et de plus il agit maintenant sous un certain angle sur la ligne de fixation, de sorte qu'il déterminerait, outre l'adduction, une rotation négative autour de la ligne de regard. Cette rotation n'existe pourtant pas quand les yeux convergent. Elle est donc compensée, et cette compensation n'est possible que par la contraction simultanée du muscle droit inférieur et du muscle oblique inférieur. Ces deux muscles sont situés avec leurs antagonistes dans un plan vertical, et chacun d'eux a une composante sur l'axe transversal et une sur l'axe visuel (*Onderz. Lab.*, t. III, p. 385). Les composantes sur l'axe transversal agissent en sens opposé (ont des demi-axes différents) et peuvent par conséquent se neutraliser. Les composantes sur l'axe visuel agissent dans le même sens, comme rotation positive, et elles neutralisent conjointement la rotation négative qui procède du muscle droit interne. Plus la convergence est forte et plus l'abaissement du plus de fixation est grand, plus il faut de compensation. Or il est clair que si, en cas de relèvement du plan de fixation, ce mouvement compensateur persiste au même degré, il acquerra la prépondérance, tandis qu'il deviendra insuffisant dans le cas où le plan de fixation continue à s'abaisser. Les torsions observées peuvent en être la conséquence.

motivé d'une manière satisfaisante. Ce n'est pas l'action musculaire, comme telle, — remarquons-le bien, — mais l'innervation dont elle dépend, qui est invoquée pour expliquer la torsion.

En étudiant plus haut les mouvements avec lignes de fixation parallèles, nous avons rencontré des torsions toutes semblables, dont l'origine a alors été laissée sans explication : serait-ce, ainsi terminions nous, dans la convergence qu'il faudrait en chercher la cause première? Et effectivement : si, lorsqu'on regarde vers le haut et vers le bas, il existe une certaine tendance respective à la divergence et à la convergence, il faut, pour maintenir en ce cas les lignes de regard parallèles, que réciproquement les innervations de la convergence et de la divergence entrent en action. Il me semble qu'ainsi se trouve suffisamment élucidée l'origine de la torsion accompagnant les mouvements avec lignes de regard parallèles.

On pourrait demander, toutefois, pourquoi, dans la vision convergente, ne s'est pas produite la tendance à obtenir, quelle que soit la position du plan de regard, la rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, la tendance, par conséquent, à maintenir parallèles, pour toutes les inclinaisons, les méridiens horizontaux apparents. Par exception, et dans une certaine mesure, ce parallélisme se maintient réellement (M. Helmholtz, M. Grossmann). Au reste, je crois qu'on peut faire à la question qui vient d'être posée la réponse suivante. Les mouvements symétriques étaient, comme nous l'avons vu, presque uniquement exigés lorsque le plan de fixation se trouvait abaissé. Entre cet abaissement et ces mouvements il dut donc se développer une association. Dès-lors, si la convergence se présentait avec une autre position du plan de regard, il y avait dans la convergence une indication auxiliaire de cette position et par conséquent de la situation de l'objet fixé ; il y avait en outre, subsidiairement, une admonition à donner à la tête ou à l'objet, ce qui est si facile lors de la vision de près, une autre position, sans que, cependant, il résultât de cette incongruence *passagère* un trouble quelconque de la vision. La tendance à éviter, pour toutes les positions du plan de regard, la torsion dans les mouvements symétriques, ne pouvait donc, certes, se faire sentir énergiquement.

Du reste, c'est un fait, ainsi que nous le verrons plus loin, que lorsqu'on continue *pendant quelque temps* à fixer par convergence des lignes horizontales en dehors de la position primaire C, la tendance à réunir les demi-images par un mouvement symétrique de torsion ne manque pas de se manifester.

Nous avons trouvé ci-dessus que, lorsque nous convergeons avec abaissement du plan de regard, le plan sur lequel nous voyons de préférence incline encore plus fortement en arrière. Nous avons reconnu, en outre, que cette inclinaison plus forte était liée à l'angle V—H, et nous avons indiqué comment, pour chaque convergence, l'inclinaison dépend de cet angle. Mais ne se pourrait-il pas que primitivement l'inclinaison choisie eût été la cause et V—H l'effet? Je crois qu'il en est réellement ainsi, et que c'est dans cette inclinaison qu'il faut chercher l'explication génétique du phénomène si mystérieux de l'incongruence. Une pareille inclinaison n'a pas été choisie parce que la vision binoculaire l'exigeait, mais elle était nécessaire pour prévenir le glissement et la chute des objets dont on s'occupait. Or, chaque fois que notre race exécutait ainsi quelque travail sur une surface approchant de l'horizontalité, sans que par une flexion suffisante de la tête le plan incliné des lignes de regard devînt perpendiculaire à cette surface, la tendance à revendiquer des points correspondants pour les demi-images fournissait la condition de la production de l'incongruence entre les méridiens horizontaux et verticaux. Quant à la réalité de cette tendance, elle ressort déjà de ce que l'incongruence, une fois établie, règle, même là où sans aucun travail manuel nous voulons voir de près, dans la lecture par exemple, le rapport entre la direction des lignes de regard et le plan sur lequel nous fixons la vue. — Pour le repos des bras, le plan en question était tout aussi désirable. Lorsque le peintre travaille sur une surface presque verticale, il cherche un appui pour son bras sur une baguette inclinée.

M. Helmholtz, on le sait, a cru trouver l'explication génétique de l'angle V dans la tendance à avoir pour horoptère le sol sur lequel on marche. Mais, suivant une remarque de M. Hering [1]),

[1]) *Beiträge*, p. 348.

dont la justesse a été corroborée par les recherches de M. van Moll [1]), ce n'est que très exceptionnellement que la valeur de l'angle V satisfait à peu près à cette condition. Je doute d'ailleurs que du sol foulé puisse procéder une forte incitation sur les méridiens correspondants. Immédiatement devant nos pieds, la situation est, par rapport à un plan de fixation presque parallèle, trop excentrique pour rendre sensible le défaut de coïncidence des demi-images, et à une certaine distance toute impression insolite nous avertit assez tôt, pour que nous ayons le temps de diriger le regard sur le point en question.

Près de nous, au contraire, à la portée de nos mains, nous devons pouvoir, tout en fixant un objet, en saisir un autre vu indirectement, et plus celui-ci est rapproché du plan horoptérique, plus est exacte, conformément à la loi de Fechner, l'estimation de la distance, qui est nécessaire pour exécuter ce mouvement de préhension. C'est pour l'inclinaison sous laquelle sont généralement situés les objets dont nous avons à nous occuper dans le voisinage, que l'horoptère a le plus d'importance. Pour la vision de loin, il suffit que les méridiens horizontaux apparents, dans lesquels les lignes de fixation se meuvent alors principalement, coïncident à peu près, et cela est effectivement réalisé: s'il reste encore un léger écart, la vue, en se portant sur l'horizon ou sur des lignes horizontales, le corrige par une torsion symétrique, ainsi que nous le verrons plus loin. L'angle des méridiens verticaux apparents n'occasionne ici aucun trouble. Lorsqu'on regarde au loin, en effet, il ne peut être question de vision stéréoscopique, et en particulier de la perception de l'inclinaison d'une ligne dressée dans le plan médian: l'angle constant V, sous lequel les demi-images de cette ligne se croisent au point de convergence, reste inaperçu et se résout dans la perception d'une direction moyenne. Il est vrai que les parties situées au-dessus et au-dessous du point de convergence seront vues, indirectement, avec un peu moins de précision; mais la vision précise de ces parties n'est pas un besoin réel.

Par cette doctrine je me place en opposition directe avec

[1]) *Onderz. Labor. Utrechtsche Hoogeschool*, 3e Sér., t. III, p. 1; 1874.

M. Hering, dont les études sur l'horoptère mathématique m'inspirent d'ailleurs tout respect. M. Hering regarde l'horoptère comme „n'ayant une utilité spéciale que lorsque les yeux s'occupent d'objets éloignés," mais comme de peu d'importance pour la vision de près, „parce que les objets extérieurs sont le plus souvent à trois dimensions, et ne pourraient donc, en tout cas, être situés que partiellement dans l'horoptère." (*Beiträge*, pag. 262). Mais c'est précisément dans l'intérêt de la vision stéréoscopique, — M. Hering ne paraît pas s'en douter, — qu'il importe à un si haut degré que les objets, dont nous nous occupons, soient groupés au voisinage d'un plan horoptérique idéal. Si dans tout travail manuel nous visons à ce résultat, les conditions sous lesquelles ce travail a été exécuté sont aussi celles sous lesquelles s'est développée la correspondance des rétines. Jusqu'à quel point celle-ci est susceptible d'être modifiée par l'exercice individuel, c'est ce que je ne me hasarde pas à décider. Nous savons que chaque œil donne aux bras d'une croix, pour la voir rectangulaire, une direction en rapport avec l'incongruence entre les deux rétines, et que l'angle formé par les directions qui font paraître un des bras vertical à chaque œil en particulier, est en général assez rapproché de l'angle V. Il s'agit donc de savoir si, un œil ayant été perdu peu après la naissance ou à une époque postérieure, l'œil restant placera les lignes de la croix dans une position exactement perpendiculaire. Cette question, assurément importante, attend encore sa solution.

Les grandes différences individuelles de l'angle V peuvent, en tout cas, être expliquées par la diversité des conditions sous lesquelles, soit chez l'individu, soit dans la race, cet angle s'est développé.

L'appendice II montre que pour mes yeux l'inclinaison du plan de regard, exigée pour la position primaire C, n'est pas constante, mais diminue quand la convergence augmente. J'avais d'abord cru trouver dans cette circonstance une explication de la torsion, qui est liée en sens positif au relèvement du plan de regard, en sens négatif à l'abaissement. Un point situé à une plus grande élévation se trouve sur la surface horoptérique à une plus grande distance

des yeux; il est par conséquent vu avec une convergence moindre, qui implique aussi une torsion positive moindre, et celle-ci pourrait être compensée par une torsion positive associée au relèvement du plan de fixation. En effet, pareille compensation s'opère dans bien des cas, et cela en vertu de la tendance, qui se manifeste régulièrement, à faire coïncider les demi-images de lignes horizontales. Ne se pourrait-il donc pas, me demandais-je, que là fût la raison d'être de la torsion liée au relèvement du plan de fixation? Et s'il en est ainsi, continuais-je, dans le cas de convergence, y a-t-il lieu de s'étonner que la même association continue à se manifester dans le cas où les lignes de fixation sont parallèles?

L'explication semblait assez plausible. Mais elle dut être rejetée, au moins comme solution principale, lorsque j'eus reconnu que chez d'autres personnes on trouve, pour des degrés de convergence différents, à peu près la même position primaire C. L'innervation associée me fournit alors, comme on l'a vu ci-dessus, un principe d'explication d'une portée plus générale.

Je dois encore tâcher de rendre compte de l'exception que présentent mes yeux sous le rapport de la position primaire C. Elle me paraît liée à la valeur particulièrement forte de l'angle H, qui, en dehors de toute influence des lignes existant dans le champ visuel, s'élève chez moi en moyenne à 0°,8 et peut atteindre 1° ou même plus. Le plan de fixation doit être abaissé d'environ 50° pour faire disparaître cet angle. En cas de convergence, nous cherchons aussi une inclinaison telle qu'il disparaisse, et, pour obtenir ce résultat, le plan de fixation devra donc toujours s'abaisser plus que, en l'absence de ce grand angle H, la position primaire C ne l'exigerait. Mais comme la torsion négative, pour un même abaissement au-dessous de la position primaire C, est d'autant plus forte que la convergence est plus forte, l'abaissement nécessaire pour la compensation deviendra de plus en plus petit, à mesure que la convergence augmentera. Ceci m'amène à conclure que, dégagée de l'influence du grand angle H, la position primaire C serait en réalité encore un peu plus élevée que je ne la trouve avec ma convergence la plus forte.

III. Torsion parallèle.

En 1858, M. Alexandre Hueck avança que, lorsqu'on incline la tête sur l'épaule, les deux yeux tournent, dans le sens opposé, autour des axes visuels: il alla jusqu'à prétendre que, pour une inclinaison de 25° à 27°, les méridiens verticaux conservent encore exactement, par suite de cette torsion, leur position verticale. Cette théorie trouva de nombreux partisans. Quelques-uns crurent aussi, de même que M. Hueck, avoir constaté cette torsion sur les vaisseaux de la conjonctive et sur l'iris. Mais, à l'épreuve de la méthode des images consécutives, la théorie ne put se soutenir. Je m'assurai qu'une image consécutive linéaire, attachée dans la position primaire au méridien vertical, suit docilement la moindre inclinaison de la tête, de sorte que, même pour une inclinaison d'une fraction de degré, ce méridien ne reste pas vertical. Cette expérience fut confirmée de toutes parts et la théorie de Hueck abandonnée.

Pourtant, 25 ans plus tard, on reconnut que M. Hueck avait eu raison en partie. L'astigmatisme, comme on sait, est neutralisé par des verres cylindriques, — pour une position déterminée de l'axe du cylindre. M. Javal, lui-même astigmatique, ayant penché, armé des lunettes neutralisantes, la tête de côté, trouva que la correction était devenue incomplète: il en conclut que l'œil, derrière le cylindre, devait avoir tourné autour de son axe. C'est effectivement ce qui a lieu. La rotation, toutefois, n'est qu'une petite fraction de l'inclinaison de la tête, environ $\frac{1}{5}$ pour les degrés faibles, à peine $\frac{1}{10}$ pour les degrés forts, — un peu différente chez des personnes différentes, — et elle pouvait donc rester aisément cachée dans l'expérience de l'image consécutive: celui qui fait cette expérience est en effet porté à croire que l'inclinaison de l'image consécutive est égale à celle de la tête. De différentes manières, toutefois, on peut se convaincre que l'image reste en arrière [1]). Le petit appareil, ci-dessus décrit (p. 406), pour le contrôle des lois de Listing et de D., se laisse employer

[1]) Voir les expériences de Hemholtz, Skrebitsky, Nagel, Woinow, ainsi que Mulder, *l. c.*

à cet effet. En fixant d'abord la base de la bande colorée et quelques secondes plus tard le sommet, on voit l'image consécutive dans le prolongement de la bande. Mais si, après fixation, on penche la tête de côté, on voit l'image faire au sommet un angle avec la bande: la bande n'est donc plus située dans le méridien où elle se trouvait lorsqu'elle formait l'image dont on perçoit maintenant l'effet consécutif. — J'ai aussi indiqué un moyen de constater la torsion sur l'iris et sur les vaisseaux de la conjonctive. J'avais cru pouvoir attribuer le mouvement de torsion observé par M. Hueck au mouvement concomitant de la ligne de fixation. Pour exclure celui-ci, j'avais laissé l'œil observer lui-même dans un petit miroir serré entre les dents au moyen d'une embouchure, et, la direction de la ligne de regard ainsi maintenue constante par rapport à la tête, je n'avais pu découvrir aucune rotation de l'œil. En principe, la méthode était irréprochable, et elle a rendu plus tard, pour d'autres problèmes, de grands services; mais l'observation était en défaut sous le rapport de la précision: en regardant avec lignes de fixation parallèles, je ne pouvais accommoder pour la faible distance de l'image spéculaire, et quand je mettais un verre convexe devant l'œil le phénomène était encore moins visible. Au lieu d'un petit miroir ordinaire, je prends maintenant une lentille biconvexe étamée à la face postérieure (N°. 38), et je constate ainsi sans peine que l'œil, tout en suivant en général l'inclinaison de la tête, éprouve pourtant aussi une petite torsion dans le sens opposé. Les torsions sont toujours égales pour les deux yeux et par conséquent réellement parallèles. Je m'en suis assuré en plaçant sur une embouchure deux tiges dressées (N°. 39), à 70 mm. l'une de l'autre et respectivement parallèles aux deux méridiens verticaux apparents; elles présentent donc, vues avec lignes de fixation parallèles, des demi-images parallèles rapprochées, et — celles-ci restent parallèles, quels que soient les mouvements imprimés à la tête et au tronc.

Pour mesurer la torsion en fonction de l'inclinaison, la méthode la plus exacte est celle que M. Mulder a suivie dans mon laboratoire. L'instrument (N°. 41) que j'ai construit en vue de ces

expériences, consiste en un fixe-tête tournant autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la ligne de base oculaire (donc inclinaison sur l'épaule) et susceptible d'être rapidement et facilement arrêté par l'observateur dans toute position voulue. La tête étant ainsi assujettie, exactement dans la position primaire, l'œil fixe pendant environ 20 secondes une ligne lumineuse (composée de flammes de gaz), formant à distance le diamètre d'un grand disque; par un petit mouvement de la main, on réduit alors la lumière à un minimum, on tourne la tête dans son support, et par un second mouvement de la main on fixe de nouveau celui-ci, juste au moment où l'image consécutive coïncide avec un fil tendu suivant un diamètre connu du disque: la différence entre l'inclinaison de ce diamètre et celle de la tête, toutes deux mesurées avec précision, constitue la torsion. Elle se produit aussi bien en cas de convergence qu'en cas de parallélisme des lignes de fixation.

Je dois encore ajouter, — remarque déjà faite par M. Breuer, — qu'à la suite d'une inclinaison rapide la torsion dépasse d'abord un peu le point ordinaire, mais pour y revenir en moins d'une seconde.

Si nous cherchons l'explication des mouvements de torsion parallèles, la première question qui se présente est celle-ci: connaissons-nous d'autres mouvements, qui se produisent dans des conditions analogues?

M. Nagel a trouvé que, lorsqu'on est couché sur le dos, la rotation autour de l'axe vertical engendre une torsion; mais, bien analysée, cette torsion se reconnaît pour une conséquence directe de celle dont nous venons de parler.

Réellement analogue à cette dernière, mais pourtant différente, est en premier lieu la torsion qui se produit lorsque, la face étant tournée horizontalement vers le bas, on fait mouvoir la tête à droite et à gauche dans le plan horizontal. Cette torsion a été étudiée par M. Breuer [1]). Il disposait l'expérience de manière

[1]) *Ueber die Function der Bogengänge des Ohrlabyrinthes*, dans: *Medicinische Jahrb.*, I, 1874.

que, la face regardant horizontalement en bas, la tête tournât autour d'un axe dirigé, perpendiculairement à la ligne de base oculaire, de la racine du nez à l'occiput. M. Mulder et moi avons encore étudié cette torsion par d'autres méthodes, qui en ont confirmé la réalité. Elle n'a toutefois qu'une existence passagère: par la nature des choses, elle ne saurait être durable.

On peut citer, en second lieu, le mouvement latéral des yeux lors de la rotation de la tête autour de l'axe vertical: si l'on demande à quelqu'un de mouvoir la tête alternativement à droite et à gauche (le geste de la dénégation), on trouve généralement que l'œil ou bien ne suit pas ces mouvements, ou bien les suit incomplétement; il en est de même lorsque, placé derrière la personne, on imprime à sa tête, avec les mains appliquées sur les tempes, le mouvement en question. Si la personne ferme les yeux, elle voit l'image consécutive d'une flamme exécuter des mouvements moins étendus que ceux de la tête.

Les mouvements saccadés de l'image consécutive, quand le corps tourne d'une manière continue autour de l'axe longitudinal, indiquent clairement aussi que les lignes de fixation restent chaque fois en arrière.

Lorsque la tête tourne autour de l'axe horizontal transversal, les yeux ont pareillement une tendance à demeurer fixés sur les mêmes objets, comme peut le montrer la mire d'une baguette tenue entre les dents.

Si, la tête fortement penchée en avant et la face horizontale, on fixe le regard sur le sol, on se convainc, de la même manière, que les yeux n'ont pas complétement suivi l'inclinaison, et si alors dans cette attitude on se meut en avant et en arrière, on constate, tout aussi sûrement, une certaine propension à laisser le regard suivre le plan qui fuit sous nos pieds.

Dans la marche ordinaire, la tête s'élève et s'abaisse à chaque pas, sans la moindre influence sur le point de fixation, et même quand on s'assied ou qu'on se lève de sa chaise, le mouvement de la tête est souvent compensé.

Enfin, lorsqu'on est entraîné passivement en avant ou en arrière, en voiture par exemple, et qu'on regarde de côté, on a de la peine

à faire suffisamment abstraction de tous les objets extérieurs pour maintenir les yeux immobiles dans l'orbite; sans cesse ils restent comme attachés aux objets, pour exécuter ensuite de nouveau un petit bond.

Si l'on ferme les yeux, tous ces phénomènes, comme nous l'apprennent les images consécutives, persistent plus ou moins longtemps, et il est probable qu'on les rencontrera aussi chez les aveugles.

Ces faits mettent hors de doute qu'il existe une tendance à compenser les mouvements de la tête et du corps par des mouvements des yeux, c'est-à-dire, une tendance à garder les objets, qui sont réellement en repos, attachés aux mêmes points de la rétine, aussi longtemps qu'il ne s'agit pas de voir d'autres objets. Déjà dans les mouvements ordinaires de la tête, cette tendance s'accuse fortement. Les personnes d'un naturel vif font en causant mille gesticulations de la tête, tout en tenant ordinairement le regard invariablement fixé sur leur interlocuteur. Beaucoup de travaux mécaniques exigent des mouvements de la tête, pendant lesquels le regard doit rester constamment dirigé sur le même point: là encore, les mouvements compensateurs des yeux sont donnés immédiatement et simultanément. C'est l'opposé de ce qui a lieu lorsqu'un point vu indirectement attire l'attention et par suite le regard: les yeux s'élancent alors vers lui, et la tête, le corps même agissent dans le même sens et accomplissent une partie du chemin; l'association est si pressante, qu'il faut un effort énergique de la volonté pour y résister. Mais, ce n'est guère avec moins de régularité qu'agit l'association compensatrice dont nous parlions tout à l'heure et que nous entendons invoquer pour expliquer la torsion.

Si l'on incline la tête *lentement* vers l'épaule, en contemplant par exemple une ligne verticale, l'idée de ce mouvement compense le passage de l'image sur d'autres méridiens: la ligne ne paraît pas changer de direction. Pour une ligne lumineuse, vue dans l'obscurité, cette compensation est toutefois insuffisante: la ligne semble alors pencher vers le côté opposé, et, pour paraître

verticale, elle doit être inclinée du même côté que la tête.

Si les mouvements se font avec *rapidité* et en outre alternativement à droite et à gauche, la ligne verticale y répond en toutes circonstances par des mouvements à gauche et à droite. Aussi imparfaitement que les méridiens nous renseignent au sujet de l'inclinaison absolue, aussi exactement ils trahissent par comparaison les angles sous lesquels deux lignes se croisent au point fixé; il est donc facile de comprendre que, lorsque l'image passe avec une rapidité relativement grande d'un méridien à l'autre, il se produise, malgré l'influence compensatrice de l'idée du mouvement de la tête, l'illusion d'un mouvement de la ligne, abstrait en quelque sorte des images rétiniennes. Or, il n'en faut pas davantage, d'après ce que nous savons, pour provoquer la torsion. Le fait que précisément dans les mouvements rapides, — qui donnent lieu, comme nous venons de le voir, au mouvement apparent le plus prononcé, — la torsion se développe aussi, passagèrement, avec le plus de force, ce fait, dis-je, est la preuve la plus convaincante qu'elle a son origine dans la tendance à la compensation; nous pouvons donc la regarder comme expliquée génétiquement par cette tendance. D'un autre côté, nous trouvons l'explication de son imperfection dans la circonstance que nous sommes moins fortement poussés à lier les méridiens à leur direction qu'à retenir invariablement les points fixés; or cette dernière condition, à laquelle se rapportent les cas analogues ci-dessus cités, ne reçoit aucune atteinte de l'inclinaison latérale de la tête.

L'association entre la torsion et l'inclinaison de la tête est si intime, qu'elle se fait encore sentir quand on a les yeux fermés, chez les aveugles, et même, à ce qu'il paraît, chez les aveugles de naissance. Conclure de là qu'elle n'émane pas des impressions rétiniennes, accuserait des vues peu exactes quant à l'origine des rapports de nos opérations.

Il n'y a pas lieu non plus de s'étonner que la position des yeux, dépendant de la torsion, se maintienne à un degré à peu près constant, aussi longtemps que dure l'inclinaison; d'autant moins, que cette position pourrait contribuer à faire apprécier

plus exactement la direction dans l'espace, ainsi que l'a admis M. Mulder, en accord avec l'explication de la torsion donnée par M. Nagel.

La remarquable découverte de Flourens (1842), qu'après la section des canaux semi-circulaires de l'oreille interne les animaux exécutent des mouvements de vacillation et de culbute, a conduit, de notre temps, par suite des recherches de MM. Goltz, Mach, Breuer et Brown, à la théorie suivant laquelle ces canaux seraient des organes sensoriels „pour l'équilibre de la tête et, médiatement, du corps entier." Cette théorie enseigne: „que les nerfs des ampoules, en vertu de leur énergie spécifique, répondent à chaque excitation par une sensation de rotation" (Mach).

Or les auteurs, que nous venons de citer, paraissent disposés à déduire de ce prétendu organe d'équilibre tous les mouvements oculaires qui sont le résultat de mouvements de la tête ou d'un changement de l'état d'équilibre. M. Breuer surtout parle à chaque instant de mouvements réflexes, dus à l'excitation des nerfs des ampoules. En premier lieu, il convient de remarquer que le mot *réflexe* n'est pas employé ici dans le sens ordinaire. Un phénomène réflexe est censé pouvoir s'accomplir sans l'intervention de la conscience, et le mouvement qui s'opère à la suite de l'excitation des ampoules est, au contraire, inséparable de l'idée consciente. Cette première remarque nous conduit ensuite au point capital: l'idée elle-même est la condition du mouvement, et tout facteur qui évoque l'idée, détermine par là simultanément les mouvements qui en dépendent. C'est ainsi qu'il est facile de se convaincre que, lorsqu'on fixe un objet, tous les petits mouvements de la tête sont compensés *immédiatement* par un mouvement associé des yeux. Cela est manifeste quand la tête tourne autour de l'axe vertical ou autour de l'axe horizontal (voir p. 445), et il n'y a absolument aucune raison pour ne pas le regarder comme applicable aussi aux torsions qui accompagnent l'inclinaison latérale de la tête. Si, pour que cette compensation s'opère, il fallait que le mouvement de la tête déterminât d'abord une tension de l'endo-

lymphe, qui se communiquerait aux ampoules et alors seulement provoquerait le mouvement réflexe, celui-ci se ferait bien attendre environ $\frac{1}{10}$ de seconde, et tout mouvement de la tête commencerait par changer le point de fixation. Dans le cas du mouvement volontaire, nous attribuons donc les mouvements de la tête et des yeux à des impulsions simultanées, ou, si l'on veut, à une seule et même impulsion complexe. De même, quand nous pouvons prévoir l'instant où se produira un mouvement passif, l'impulsion sait trouver le moment précis pour la contraction musculaire, avant même que ce mouvement passif fasse sentir son influence. En général, nous nous armons de notre volonté contre ce que nous prévoyons, et les yeux sont en cela notre garde la plus sûre. Les yeux fermés, le meilleur cavalier est désarçonné par les écarts inattendus de sa monture. Ainsi, là seulement où les mouvements de la tête ne sont pas prévus, une part d'influence pourrait peut-être revenir à l'organe de l'équilibre. Mais, là encore, il resterait à savoir si le déplacement des images sur la rétine ne provoquerait pas plus rapidement et plus sûrement les mouvements correspondants.

Plus haut (p. 443) j'ai déjà montré (N°. 39, embouchure avec tiges verticales) que la torsion parallèle s'opère sur les deux yeux au même instant et au même degré. J'ai aussi fait remarquer (p. 407) que le contrôleur des lois de Listing et de D. peut nous apprendre jusqu'à quel point la loi de Listing reste encore applicable en cas d'inclinaison latérale de la tête, inclinaison accompagnée de torsion. Cette question mériterait bien un examen spécial.

IV. Torsion symétrique indépendante.

Nous avons à traiter ici d'un mouvement de torsion dans lequel les deux yeux tournent simultanément vers le côté médian ou vers le côté temporal autour de leur ligne de fixation, mouvement par conséquent symétrique, et qui non-seulement est indépendant d'autres mouvements de la ligne de fixation, ce qui s'applique aussi aux mouvements de torsion parallèle, mais indépendant en outre des

mouvements de la tête et du tronc. Cette torsion symétrique n'a que peu d'étendue, mais elle est remarquable au plus haut degré, parce que son rapport avec la fonction optique saute nettement aux yeux.

Ce sont mes expériences avec l'isoscope qui m'ont conduit à l'étude de la torsion symétrique. Je voulais examiner avec cet instrument la position des méridiens pour toutes les directions des lignes de regard. Mais, dès les premières expériences, il devint évident qu'il y avait encore d'autres facteurs actifs, et que notamment les objets qui se trouvent dans le champ visuel exercent une influence sur la position des méridiens. Cette influence devait donc être étudiée en premier lieu.

Des exemples de torsion sous la pression des images rétiniennes ne sont pas entièrement inconnus. Il y a plus de 25 ans, j'ai montré que si, au moyen d'un prisme faible tenu devant un des yeux, on déplace l'image rétinienne de ce côté, soit en dedans ou en dehors, soit même en haut ou en bas, la tendance à la vision simple provoque des mouvements, qui ramènent les images à des points correspondants. Plus tard, M. Helmholtz, par une combinaison particulière de deux prismes, fit pencher de côté l'image d'un des yeux, et se convainquit de la tendance à corriger aussi cette déviation, et cela par une torsion. Déjà antérieurement, M. Nagel avait vu une torsion se produire sous l'influence de figures stéréoscopiques tournées dans leur plan, et M. Hering, qui d'abord avait combattu l'opinion de Helmholtz, dut, après avoir répété les expériences de Nagel, déclarer la cause gagnée. La torsion ainsi observée est un mouvement qui se développe lentement et qui se rapproche assez de celui que nous observons lors du déplacement vers le haut ou vers le bas d'une des images rétiniennes. Mais dans ce phénomène on ne paraît avoir vu que l'effet d'une impulsion anormale: si l'œil est en état d'y obéir, cela, pensait M. Nagel, ne pouvait pas surprendre, par la raison que la torsion, associée à certains mouvements de la ligne de fixation, n'est en général pas étrangère à l'œil. Je doute que la torsion fût devenue possible sous une pression anormale, si dans la vision ordinaire un rôle propre ne lui avait été départi. Avant de chercher ce rôle, je crois devoir mentionner les prin-

cipaux résultats de torsion artificielle, si je puis m'exprimer ainsi, obtenus avec l'isoscope [1]).

La torsion est mesurée, dans l'isoscope, par la variation de l'angle que font entre eux les méridiens de même direction apparente, spécialement les méridiens apparents verticaux ou horizontaux. C'est surtout pour les méridiens verticaux que j'ai étudié cette variation. L'angle qu'ils forment est, comme nous l'avons vu, toujours positif, et il a pour mes yeux une valeur particulièrement grande, atteignant 3°,3. C'est là l'angle V, sous lequel je dois disposer dans l'isoscope deux fils approchant de la verticale, pour les faire paraître parallèles. Si alors je continue longtemps l'expérience, en regardant à travers un large cylindre et avec un écran gris pour fond, de manière à n'avoir dans le champ visuel rien que les deux fils, et en ramenant toujours ces fils au parallélisme apparent, l'angle s'élève peu à peu jusqu'à 4°,3. Après un intervalle d'une heure, cet effet n'est pas encore entièrement dissipé. Indépendamment de toute expérimentation, V s'élève un peu dans le courant de la journée.

Si, dans l'expérience, je place les fils sous un angle plus grand que 3°,3, V augmente rapidement, surtout lorsque par intermittence je les fais coïncider (en divergeant faiblement); si je les place sous un angle beaucoup plus petit, V diminue rapidement. En opérant ainsi, j'ai obtenu en quelques minutes une variation entre 2°,88 et 4°,85.

Je plaçai derrière le cadre de l'isoscope deux séries de larges lignes noires, une série pour l'œil droit, une pour l'œil gauche, et dans le cadre, pour indiquer les méridiens verticaux apparents, deux cordons rouges, comme d'ordinaire à une distance de 70 millimètres l'un de l'autre. Les deux séries pouvaient être disposées parallèlement, mais aussi, à volonté, sous un angle positif ou négatif: toujours se manifesta la tendance à les fusionner par torsion sous l'angle ordinaire. J'obtins ainsi en peu de minutes une variation de $V = 4°,65$ à $V = -0°,11$. En soustrayant les valeurs de V

[1]) *Onderz. physiol. labor.* 3e série, t. II, pag. 45; et *Archiv f. Ophth.*, t. XXI. 3, pag. 100.

de l'angle sous lequel étaient placées les deux séries, on avait l'angle sous lequel elles s'étaient fusionnées. Cet angle a été estimé trop haut dans la combinaison stéréoscopique, parce qu'on ne connaissait pas la torsion compensatrice.

On peut aussi fixer par convergence une baguette placée derrière le cadre de l'isoscope dans le plan médian, et inclinée alternativement en avant et en arrière: l'influence des demi-images sur la position des méridiens verticaux se fait alors encore valoir. Par ce moyen, j'ai trouvé une variation de $V = 2°,6$ à $V = 4°,98$.

Dans toutes ces expériences, il suffit qu'il y ait un seul fil horizontal tendu dans le champ de l'isoscope, pour que ce fil tienne en bride les méridiens. Ni la durée prolongée des expériences, ni les directions des demi-images de lignes ou de baguettes ne sont alors capables de modifier notablement l'angle V.

Les demi-images des lignes horizontales prédominent donc très manifestement sur celles des lignes verticales. Par là, elles sont la base de la vision stéréoscopique. Sous leur influence, les yeux se disposent de telle sorte que les demi-images en question coïncident à peu près dans les méridiens horizontaux apparents, et c'est seulement par suite de cette position fixe que l'angle des méridiens verticaux apparents acquiert son importance stéréoscopique. On obtient une indication fausse quand, par un artifice, on impose aux yeux une torsion pour faire coïncider les demi-images horizontales: si on dirige les lignes de fixation, par entrecroisement, sur deux systèmes de lignes qui s'écartent un peu en sens opposé de la direction horizontale, la tendance à les faire coïncider détermine la susdite rotation autour de la ligne de regard, et un fil vertical, passant par le point de convergence, paraît alors incliner dans le plan médian en avant ou en arrière, suivant le sens de la rotation. Pour cette remarquable expérience on peut se servir de l'isoscope [1]).

Il s'agit maintenant d'examiner dans quelles circonstances de la vision ordinaire se manifeste la rotation symétrique, que nous venons

[1]) Dans une autre occasion, je reviendrai sur la signification de ces phénomènes pour la vision stéréoscopique.

de voir se produire sous l'influence de demi-images évoquées artificiellement. En premier lieu, elle apparaît quand on fixe par convergence des lignes horizontales en dehors de la position primaire C. J'ai déjà mentionné ce cas ci-dessus (p. 437). J'ai fait remarquer que l'angle des demi-images poussait alors à rechercher la position primaire en question. Mais il n'est pas toujours possible d'obéir à cette impulsion. L'objet, dans les conditions données, ne se laisse peut-être pas déplacer, et les mouvements de la tête rencontrent des obstacles: les yeux tournent alors autour de la ligne de fixation, et les demi-images horizontales se rapprochent de l'égalité de direction. L'isoscope met de nouveau le fait en évidence par le changement de l'angle V. — La vision et le maniement de lignes verticales et de lignes plus ou moins obliques, situées dans le plan médian ou tout près de ce plan, donne aussi lieu de constater une torsion accommodatrice, surtout lorsque les yeux ne se trouvent pas sous le contrôle trop sévère de lignes à peu près horizontales. Enfin, un petit nombre d'expériences suffit à faire connaître l'action accommodatrice de la torsion en cas de convergence asymétrique. Lors donc que le regard se repose pendant quelques instants sur un point quelconque, il arrive que, sous la réserve d'une certaine suprématie des lignes horizontales, tous les points et lignes marqués, qui se trouvent dans le champ visuel, font sentir leur influence sur la position des yeux; ceux sur lesquels l'attention se fixe particulièrement, c'est-à-dire, en général, ceux qui sont voisins du champ de vision directe, exerceront une action prépondérante, mais pourtant, ainsi que me l'a de nouveau appris l'isoscope, les lignes situées aux limites du champ de vision binoculaire, et que l'on n'avait pas même remarquées, auront aussi leur part d'influence.

Dans chaque position les yeux cherchent donc, par de petites oscillations autour de la ligne de regard, leur horoptère, en rapport avec les images du champ visuel. Ainsi se manifeste la tendance inconsciente à accommoder la position des yeux aux exigences de la vision binoculaire. Dans cette tendance est impliquée l'origine même de la torsion symétrique.

Appendice I. Dans l'*Archiv f. Ophth.*, t. XVIII, 1, p. 53, on trouve des recherches de M. Dobrowolsky, dont le résultat est que, sur 21 personnes regardant par convergence dans la position primaire P, on aurait observé jusqu'à 14 fois une torsion *négative*. Ce résultat m'a engagé à étendre mes déterminations à un grand nombre d'individus; mais, pas plus que d'autres observateurs indépendants, je n'ai pu rencontrer un seul cas d'une pareille torsion négative. Une partie des expériences fut faite après détermination exacte de la position primaire P, notamment par MM. Engelmann, Bouvin, Mulder, Van Rees, Winkler, Grosmann, van der Ven, Goenee. Pour d'autres, je me bornai à placer la tête simplement d'aplomb, dans une position qui certainement était très voisine de la position primaire P. Dans ces dernières expériences, on fit usage de la même méthode qu'avait employée M. Dobrowolsky sur les indications de M. Helmholtz, méthode qui consiste à réunir deux rayons des disques de Volkmann, vus dans un stéréoscope à réflexion, avec miroirs tournants. Les miroirs étant en mouvement, l'observateur, par combinaison stéréoscopique des petits anneaux que portent les rayons, suit ceux-ci, si c'est possible, jusqu'à ce que les lignes de fixation soient parallèles, puis, l'un de ces rayons étant placé horizontalement, il donne à l'autre, avec la main, la même direction apparente. Cela fait, on tourne les miroirs en sens opposé, de manière à imposer une convergence de plus en plus forte. L'observateur remarque alors que les rayons ne se montrent plus parallèles, mais forment une ligne brisée; on l'invite à tourner l'un des rayons jusqu'à ce que le parallélisme soit rétabli. Or, constamment cette rotation fut exécutée dans le sens qui devait être nécessaire après une torsion positive.

Le tableau suivant donne un aperçu de ces expériences:

Nom.	Age.	Réfraction.	Torsion positive.
Kränchel	29	E	2°,7
Van Moll	25	E	3°,4
Engelmann	29	$M_{\frac{1}{20}}$	3°,3
Küster	28	E	3°,3
Lentink	29	$M_{\frac{1}{40}}$	2°,2
Luchtmans	22	E	1°,2
V. D. Post	21	E	4°
Mulder	27	E	4°.05
Frank	32	$M_{\frac{1}{10}}$	4°
Callan	32	M	5°,2
Backer	24	E	5°
Van Lunteren	25	E	4°.25
V. D. Loo	21	E	4°
V. D. Heuvel	26	Ah	2°
Paling	19	E	5°,25
V. D. Ven	22	E	5°.5
V. D. Meulen	25	E	4°,3

En présence de ces résultats, ceux de M. Dobrowolsky me semblent problématiques. Peut-être n'a-t-il pas donné une attention suffisante à la position primaire: en s'écartant relativement peu de cette position, MM. Engelmann, Van Moll, Küster et Grossmann auraient pu présenter une torsion négative.

Il en est de même de M. Dastich et, à ce que je crois, de MM. Nagel et Claparède.

Appendice II. *a.* Déjà en 1873, j'avais fait, en me servant de l'isoscope, quelques recherches sur la position primaire C (voir *Onderzoek. Lab.*, III, p. 380), et j'avais dès lors remarqué qu'avec de fortes convergences l'angle *s* diminue et reste alors initialement, pour des convergences moindres, plus petit; en cas de divergence, au contraire, l'angle augmentait un peu. C'est ainsi que j'avais noté:

1.	converg. à 150 m.m.	après un travail ordinaire,	$s = 40^{0},1$
2.	" " " "	après 2 min. de divergence	$44^{0},5$
3.	" " " "	immédiatement après	$41^{0},8$
4.	" " 100 "		$33^{0},20$
5.	" " 150 "	immédiatement après	$36^{0},55$
6.	" " " "	immédiatement après	$36^{0},95$
7.	" " " "	après 3 min. de divergence	$45^{0},33$
8.	" " " "	immédiatement après	$41^{0},76$

En répétant maintenant les expériences avec l'horoptéroscope, j'ai obtenu des résultats semblables. Voici une couple de séries, prises à des jours différents:

	mm.	I.	II.
convergence à	977	42	45
	648	42	44
	234	40	41
	212	40,6	41,2
	194	35,7	37,2
	178	37	38
	153	36,7	35,2
	134	34,5	33,7
	120	32,7	35,3

Avec le maximum de convergence, j'ai obtenu comme minimum 27°,2, avec la convergence ordinaire une fluctuation entre 37° et 40°. — Quant aux variations de l'angle *s*, même en cas de convergence égale, on en trouve ci-dessus (p. 47) une explication satisfaisante.

Chez la plupart des observateurs j'ai trouvé, pour des degrés de convergence différents, *s* à peu près constant. C'est ainsi que chez M. Bouvin, à quatre jours différents, *s* s'éleva en moyenne à 24°,8, 24°,3, 24°,1 et 23°,2, avec des écarts assez grands dans les observations particulières, mais sans influence sensible des

degrés de convergence. Il en fut de même de l'aide Goenee, dont les moyennes, à trois jours différents, s'élevèrent à 25°,7, 26°,5 et 25°,7. M. Mulder trouva environ 35°, M. Winkler 25°, M. van Rees 27°, M. van de Ven entre 20° et 30°. Dans le livre de M. Hering, *Die Lehre vom Binocularen Sehen* (p. 96), nous voyons que l'auteur a trouvé pour lui-même environ 20°, et qu'on peut admettre pour M. Meissner une valeur positive assez grande, pour M. von Recklinghausen une valeur $s = 35°$. MM. Volkmann et Welcker avaient aussi des angles positifs. Enfin, il n'y a pas lieu de douter que la même chose ne s'appliquât aux divers observateurs qui ont présenté, par convergence dans la position primaire P, une torsion positive (voir *Appendice* I).

A ces cas on peut opposer ceux, en nombre moindre, où s devient très petit ou même = 0°, comme chez MM. Helmholtz, Engelmann et Grossman, et aussi (à ce que je crois me rappeler) chez M. Nagel; mais quant à des valeurs négatives, en dehors des 14 cas sur 21 de M. Dobrowolsky, je n'en ai trouvé nulle part la moindre mention.

b. A l'aide de l'horoptéroscope j'ai aussi déterminé la quantité dont avait basculé le plan dans lequel se coupaient les méridiens verticaux apparents. Ces déterminations laissèrent, il est vrai, à désirer sous le rapport de l'exactitude, mais dans toutes il était pourtant facile de constater la liaison avec l'angle V—H et le décroissement de α à mesure que la convergence augmentait.

Je citerai, à l'appui, les deux séries suivantes:

I.

	s	α
Converg. à 1000 m.m.	45°,9	37°
" " 750 "	44,8	29,3
" " 500 "	43,3	25,5
" " 234 "	37,6	7,4
" " 150 "	33,9	4,7
" " 126 "	34	4
" " 108 "	33,5	3,3
" " 95 "	33,5	2,75
" " 84 "	32,3	2,6

II.

Converg. à	α, trouvé.	Converg. à	($m = 1°,25$) α, calculé.
976 mm.	35°,2	999,4 mm.	34° 17′
733	27°,7		
488	20°;22°	498,2	18° 50′
231	11°,3; 9°,7	197,3	11° 34′
		146,4	7° 46′
142	6°,3; 6°,55		
122	5°,15		
100	3°,2	94,5	3° 54′

Il y a différentes causes qui empêchent d'atteindre une grande exactitude pour les valeurs de α. L'instrument ne se prête pas à une détermination très précise, mais je suis convaincu que les déterminations les plus rigoureuses offriraient aussi de grands écarts, parce que la fonction visuelle elle-même laisse une liberté assez grande. Le calcul se heurte à la difficulté de trouver pour V—H, et par suite pour $m = \frac{1}{2}$ (V—H), des chiffres exacts. L'inconstance de V et de H oblige à déterminer ces deux grandeurs simultanément, et, dans cette opération, des méthodes différentes fournissent de nouveau des résultats peu concordants. La valeur de V—H varie aussi avec les valeurs absolues de V et de H, en cas de torsion, fait dont je ne suis pas en état de rendre compte.

Dans la suite des recherches dont j'ai publié la première partie dans les *Onderz. phys. labor.*, t. III. 2, p. 45 et dans l'*Archiv f. Ophth.*, t. XXI. 3, je reviendrai plus en détail sur la détermination de H et de V—H.

SUR LES

ONDES SONORES CYLINDRIQUES,

PAR

C. H. C. GRINWIS.

Lorsque, des divers points d'une ligne droite homogène, partent des vibrations égales et de même phase, il peut se former dans l'air un système d'ondes cylindriques, dont cette ligne droite est l'axe.

Je me propose d'étudier ici les ondes de cette nature, spécialement en ce qui concerne l'énergie, l'intensité et le timbre du son qui prend naissance lorsque les vibrations susdites ont une même période, dont la durée tombe entre les limites correspondant à un ton musical. J'ai déjà étudié de la même manière, dans des Mémoires précédents [1]), les ondes sphériques qui se développent autour d'un petit espace vibrant, considéré comme centre.

Les particules d'air situées sur une surface cylindrique, dont la ligne droite, source du son, constitue l'axe, se trouvent toutes, à un moment quelconque, dans le même état de vibration; le mouvement est donc symétrique tout autour de cette ligne.

Prenons cette droite pour axe des coordonnées x, et soit $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ la distance d'une particule d'air à cette droite; φ, le potentiel de vitesse du mouvement sonore, dépendra alors uniquement de r et de t (le temps), de sorte qu'on aura

$$\varphi = f(r, t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

[1]) *Arch. Néerl.*, t. X, p. 135 et 151.

L'équation connue du potentiel de la vitesse du mouvement de l'air [1])

$$\frac{d^2\varphi}{d t^2} = a^2 \left(\frac{d^2\varphi}{d x^2} + \frac{d^2\varphi}{d y^2} + \frac{d^2\varphi}{d z^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \text{(I)}$$

se transformera donc ainsi:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{dr}{dy} \qquad r^2 = y^2 + z^2$$

$$= \frac{d\varphi}{dr}\,\frac{y}{r} \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dr}\,\frac{z}{r}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\,\frac{y^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\,\frac{z^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)$$

et (I) deviendra finalement:

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr} \quad \ldots \ldots \ldots \text{(II)}.$$

Pour intégrer cette équation, posons [2]):

$$\varphi = \Sigma\,(A_n\, r^n) \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

où le signe Σ marque une série à indices décroissants pour n, tandis que A_n est une fonction de r et t qui satisfait à l'équation différentielle partielle:

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{d^2 A_n}{dt^2} = \frac{d^2 A_n}{dr^2} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

[1]) Duhamel, *Cours de Mécanique*, t. II, No. 197.

[2]) Airy, *On Sound*, London, 1868, Nos. 43 et 44.

on peut donc prendre pour A_n une fonction arbitraire de $r - a t$, de sorte que

$$A_n = F_n (r - a t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Si nous substituons la valeur de φ donnée par (2) dans l'équation (II), la condition que cette dernière équation doit par là devenir identique fournit des relations entre les A_n, A_{n-1}, A_{n-2} etc. successifs; on reconnaît alors que $n = -\frac{1}{2}$, et que

$$A_{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \int A_{-\frac{1}{2}}\, d r$$

$$A_{-\frac{5}{2}} = \frac{9}{128} \int d r \int A_{\frac{1}{2}}\, d r$$

$$A_{-\frac{7}{2}} = \frac{75}{1024} \int \int \int A_{-\frac{1}{2}}\, d r^3 \text{, etc.}$$

de sorte que, en écrivant A au lieu de $A_{-\frac{1}{2}}$, il vient:

$$\varphi = \frac{A}{\sqrt{r}} + \frac{1}{8} \frac{\int A dr}{r \sqrt{r}} + \frac{9}{128} \frac{\int\int A dr^2}{r^2 \sqrt{r}} + \frac{75}{1024} \frac{\int\int\int A dr^3}{r^3 \sqrt{r}} + \text{etc.} \quad \text{(III)}.$$

Lorsque les vibrations sont celles d'un ton musical dont la longueur d'onde est λ, A peut être représenté par

$$C \cos k\, (r - a\, t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

où C est une constante, $k = \frac{2\,\pi}{\lambda}$. Nous obtenons alors:

$$\varphi = \frac{C \cos k (r - a\, t)}{\sqrt{r}} + \frac{1}{8} \frac{C \sin k (r - a\, t)}{k\, r \sqrt{r}} - \frac{9}{128} \frac{C \cos k (r - a\, t)}{k^2 r^2 \sqrt{r}} - \text{etc.} \quad \text{(IV)};$$

et il est facile de montrer que cette valeur satisfait à (II).

Elle se laisse encore mettre sous la forme:

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{r}} \left\{ \cos k (r - a t) + \frac{1}{16 \pi} \sin k (r - a t) \left(\frac{\lambda}{r}\right) - \frac{9}{512} \cos k (r - a t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 + \text{etc.} \right\}.$$

En se bornant aux particules d'air assez éloignées de la source sonore pour que la seconde puissance de $\frac{\lambda}{r}$ et les puissances supérieures puissent être négligées, on a:

$$\varphi = \frac{C \cos k (r - a t)}{\sqrt{r}} + \frac{1}{8} \frac{C \sin k (r - a t)}{r \sqrt{r}} \quad \ldots\ldots \text{(V)}$$

ou, si pour abréger l'on pose

$$k (r - a t) = u, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6)}$$

$$\varphi = \frac{C \cos u}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8} \frac{C \sin u}{r^{\frac{3}{2}}},$$

il vient alors:

$$\frac{1}{a} \frac{d \varphi}{d t} = \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ k \sin u - \frac{1}{8} \frac{\cos u}{r} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(7)}$$

$$\frac{d \varphi}{d r} = - \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ k \sin u + \frac{3}{8} \frac{\cos u}{r} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

Si maintenant nous indiquons, comme précédemment, par E, T et U les énergies potentielle, actuelle et totale du mouvement sonore, nous trouvons, ϱ_0 représentant la densité normale de l'air [1]):

$$E = \frac{1}{2} \varrho_0 \int \frac{1}{a^2} \left(\frac{d \varphi}{d t} \right)^2 d v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(9)}$$

$$T = \frac{1}{2} \varrho_0 \int \left(\frac{d \varphi}{d r} \right)^2 d v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(10)}$$

$$U = E + T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(11)}$$

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que E n'est pas l'énergie potentielle absolue de l'air, mais seulement celle du mouvement sonore, c'est-à-dire, l'énergie de la dilatation ou de

1) *Arch. Néerl.*, t. X, p. 138 et 139.

la condensation produite dans l'air à raison de son mouvement.

Admettons, en outre, que la droite faisant fonction de source sonore ait une longueur l; menons par ses extrémités, perpendiculairement à elle, deux plans indéfinis, et déterminons l'énergie dans un espace limité pas ces deux plans et par deux surfaces cylindriques ayant pour axe la droite en question. Si r est la distance d'un point de cet espace à l'axe, et $d\,v$ un élément de volume cylindrique, on a

$$d\,v = 2\,\pi\,l\,r\,d\,r \,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

et pour les 3 énergies dans cet élément, dE, dT, dU, nous trouvons:

$$dE = \varrho_0\,\pi\,l C^2 \left(k^2 \sin^2 u - \frac{1}{4}\frac{k}{r} \sin u \cos u + \frac{1}{64}\frac{\cos^2 u}{r^2}\right) d\,r\,. \quad (13)$$

$$dT = \varrho_0\,\pi\,l C^2 \left(k^2 \sin^2 u + \frac{3}{4}\frac{k}{r} \sin u \cos u + \frac{9}{64}\frac{\cos^2 u}{r^2}\right) d\,r\,. \quad (14)$$

$$dU = \varrho_0\,\pi\,l C^2 \left(2\,k^2 \sin^2 u + \frac{1}{4}\frac{k}{r} \sin 2\,u + \frac{5}{32}\frac{\cos^2 u}{r^2}\right) d\,r\,. \quad (15)$$

de sorte que:

$$dU = \frac{\varrho_0}{2} C^2 \left(2\,k^2 \frac{\sin^2 u}{r} + \frac{1}{4}\frac{k}{r^2} \sin 2\,u + \frac{5}{32}\frac{\cos^2 u}{r^3}\right) d\,v\,. \quad (16)$$

$$\frac{dU}{dv} = \frac{\varrho_0}{2} C^2 \left(2\,k^2 \frac{\sin^2 u}{r} + \frac{1}{4}\frac{k \sin 2\,u}{r^2} + \frac{5}{32}\frac{\cos^2 u}{r^3}\right)$$

Or l'intensité du son est [1]):

$$I = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{d\,U}{d\,v}\,d\,t,$$

où T représente le temps de vibration. Mais on a:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \sin^2 u\,d\,t = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \cos^2 u\,d\,t = \frac{1}{2}$$

[1]) *Arch. Néerl.*, t. X, p 153.

et

$$\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \sin 2\,u\,d\,t = 0\,,$$

donc:

$$I = \frac{2}{\varrho_0} C^2 \left\{ \frac{k^2}{r} + \frac{5}{64\,r^3} \right\}$$

$$= \frac{\varrho_0\,C^2}{2r\lambda^2} \left\{ 4\,\pi^2 + \frac{5}{64}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{A}{r\,\lambda^2} \left\{ 4\,\pi^2 + \frac{5}{64}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Pour de grandes distances, on trouve

$$I = \frac{B}{r\,\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{VI}a)$$

l'intensité est alors en raison inverse de la distance et du carré de la longueur d'onde. Pour ce qui regarde l'énergie contenue dans une onde, remarquons que, d'après la valeur (15), l'énergie dU, dans une couche élémentaire située à la distance r, diminue à mesure que r augmente, et qu'elle tend vers la *limite*

$$dU = 2\varrho_0\,\pi\,l\,C^2\,k^2\,\sin^2 u\,d\,r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

quant aux valeurs dE et dT, pareillement variables et décroissantes avec la distance, elles sont toujours *inégales*, et telles que $dT > dE$; néanmoins, elles tendent vers la même limite

$$dE = dT = \tfrac{1}{2}\,dU = \varrho_0\,\pi\,l\,C^2\,k^2\,\sin^2 u\,d\,r \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

De même que précédemment [1]), nous avons affaire ici, à raison de la valeur du déplacement qui se déduit de (8), à une longueur d'onde variable; en prenant de nouveau pour longueur d'onde

---

[1]) *Arch. Néerl.*, t. X, p. 156.

normale $\lambda = a\,T = \frac{a}{n}$, nous avons pour l'énergie totale dans une pareille onde, au temps t

$$U = 2\varrho_0\,\pi\,l\,C^2\,k^2\int_r^{r+\lambda} \sin^2 k(r-a\,t)\,d\,r$$

$$= 2\varrho_0\,\pi\,l\,C^2\,k^2\left\{-\frac{1}{4}\sin 2\,k(r-a\,t)+\frac{1}{2}\,k(r-a\,t)\right\}_r^{r+\lambda}$$

$$= \frac{4\varrho_0\,\pi^3\,l\,C^2}{\lambda} \quad \text{(VII)}$$

et pour E et T, dans le même cas:

$$E = T = \frac{1}{2}\,U = \frac{2\varrho_0\,\pi^3\,l\,C^3}{\lambda} \quad \text{(VIII)}$$

expressions qui donnent les valeurs des énergies à une *grande* distance de l'axe.

L'énergie moyenne qui existe, pendant la durée d'une vibration, dans un espace d'onde normal, à une distance *quelconque*, peut être immédiatement déduite de la valeur de I. Nous avons en effet pour cette énergie:

$$U = \int I\,d\,v = 2\,\pi\,l\int_r^{r+} I\,r\,d\,r$$

$$= \pi\,\varrho_0\,C^2\,l\int_r^{r+\lambda}\left(k^2+\frac{5}{64r^2}\right)d\,r$$

$$= \pi\,\varrho_0\,C^2\,l\left(k^2\,r-\frac{5}{64r}\right)_r^{r+\lambda}$$

$$= \varrho_0\,\pi\,l\,C^2\left(\frac{4\,\pi^2}{\lambda}+\frac{5\,\lambda}{64\,r\,(r+\lambda)}\right) \quad \text{(IX).}$$

formule qui, pour de grandes valeurs de r, se confond avec (VII).

Au sujet du décroissement de U, lorsque r augmente, je renvoie à mon précédent Mémoire [1]).

En ce qui concerne le partage des deux énergies E et T, nous avons vu que pour un élément de volume

$$d\,v = 2\,\pi\,l\,r\,d\,r,$$

r étant croissant, E et T ont la même limite, exprimée par (VIII). Des formules (13) et (14), combinées avec (7) et (8), il ressort que, pour r quelconque, dT est toujours plus grand que dE; en se bornant aux trois premiers termes de dE et de dT, on trouve pour l'énergie *moyenne*, pendant la durée d'une vibration, dans un espace d'onde normal:

$$\mathrm{E} = \varrho_0\,\pi\,l\,\mathrm{C}^2 \int_r^{r+\lambda} \left(\frac{1}{2}\,k^2 + \frac{1}{128}\,\frac{1}{r^2}\right) d\,r$$

$$= \varrho_0\,\pi\,l\,\mathrm{C}^2 \left\{ \frac{2\,\pi^2}{\lambda} + \frac{1}{128}\,\frac{\lambda}{r(r+\lambda)} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(X)}.$$

$$\mathrm{T} = \varrho_0\,\pi\,l\,\mathrm{C}^2 \int_r^{r+} \left(\frac{1}{2}\,k^2 + \frac{9}{128}\,\frac{1}{r^2}\right) d\,r$$

$$= \varrho_0\,\pi\,l\,\mathrm{C}^2 \left\{ \frac{2\,\pi^2}{\lambda} + \frac{9}{128}\,\frac{\lambda}{r(r+\lambda)} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XI)}$$

où l'on voit que T > E, tandis que la somme de E et T concorde avec la valeur donnée par (IX).

Examinons enfin le *timbre* des tons composés, comme nous l'avons fait précédemment pour les ondes sphériques [2]); nous aurons pour l'intensité du p^e ton partiel, en vertu de (VI):

$$\mathrm{I}_p = \frac{\mathrm{A}_p}{r\,\lambda^2_p} \left\{ 4\,\pi^2 + \frac{5}{64}\left(\frac{\lambda_p}{r}\right)^2 \right\};$$

---

[1]) *Arch. Néerl.*, t. X, p. 157.

[2]) *Arch. Néerl.*, t. X, p. 160.

par conséquent pour le timbre, en faisant $4\pi^2 = c^2$ et $\frac{5}{64} = \mu$:

$$\alpha_p = \frac{I_p}{I} = \left(\frac{\lambda A_p}{\lambda_p A}\right)^2 \left\{\frac{c^2 r^2 + \mu \lambda^2_p}{c^2 r^2 + \mu \lambda^2}\right\}.$$

Si les tons supérieurs sont harmoniques, on a $\lambda_p = \frac{1}{p}\lambda$; posons de nouveau $A_p = k A$, il vient:

$$\alpha_p = k^2 \left\{\frac{c^2 r^2 p^2 + \mu \lambda^2}{c^2 r^2 + \mu \lambda^2}\right\};$$

c'est-à-dire, près de la source:

$$r = 0 \qquad \alpha^0_p = k^2,$$

et à grande distance:

$$r = \infty \qquad (\alpha_p) = p^2 k^2$$

ou

$$(\alpha_p) = \left(\frac{\lambda A_p}{\lambda_p A}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2_p} \alpha^0_p,$$

de sorte que l'intensité relative du p^e ton partiel est p^2 fois plus grande à distance que tout près de la source.

Bien que ceci ne soit rigoureusement vrai que pour une distance infinie, la loi est déjà passablement satisfaite à une distance relativement courte. Nous obtenons donc ici les mêmes résultats que pour les ondes sphériques qui s'étendent autour d'un point, et nous renvoyons en conséquence, pour plus de détails, à ce que nous avons dit en traitant de ce dernier cas.

UTRECHT, Avril 1875.

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UNE GOUTTE

ENTRE DEUX PLAQUES HORIZONTALES,

PAR

J. BOSSCHA.

---

1. Les conditions d'équilibre d'un liquide soumis à l'action de forces moléculaires, émanant soit des parties du liquide lui-même, soit d'autres corps avec lesquels il est en contact, peuvent dans la plupart des cas être trouvées d'une manière très simple, en faisant usage de la proposition physique que l'agrandissement de la surface d'un liquide exige un certain travail, proportionnel à cet agrandissement. Cette proposition se laisse déduire du résultat final auquel Gauss a été conduit, par une étude analytique longue et difficile, dans ses *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* (p. 65). Mais on peut aussi la faire dériver directement et sans calcul de la nature des forces moléculaires, qui, n'agissant qu'à des distances imperceptibles, ne peuvent fournir qu'au voisinage immédiat de la surface une résultante de valeur appréciable, et toujours dirigée suivant la normale à la surface.

Pour l'application du principe des vitesses virtuelles à l'équilibre des forces moléculaires, la proposition susdite permet d'exprimer le moment virtuel des forces moléculaires par le produit d'une grandeur constante et de l'agrandissement de la surface, déterminé par un dérangement infiniment petit du système dont on veut

connaître les conditions d'équilibre. Dans mon Traité élémentaire de physique (*Leerboek der Natuurkunde*), au chapitre des forces moléculaires, j'ai montré avec quelle simplicité on peut résoudre, à l'aide de cette proposition, plusieurs problèmes concernant les actions capillaires.

Le cas suivant d'équilibre en fournit un nouvel exemple remarquable.

2. On demande de trouver la condition d'équilibre d'une goutte liquide, qui repose sur une plaque horizontale et est couverte par une seconde plaque horizontale, chargée d'un poids. La goutte est supposée assez grande pour que la surface du liquide, restée à découvert entre les deux plaques, puisse être regardée comme d'une étendue insensible en comparaison de la surface qui est commune au liquide et aux plaques; en d'autres termes, pour que la hauteur de la goutte soit très petite par rapport au rayon de ses bases supérieure et inférieure. Il suit de là, que les surfaces par lesquelles la goutte touche les deux plaques peuvent être regardées comme égales entre elles.

Désignons le liquide, la plaque supérieure et la plaque inférieure, dans l'ordre où nous venons de les nommer, par les indices 1, 2, et 3; conformément à la notation usuelle, K_1 est alors le travail nécessaire pour agrandir de l'unité carrée la surfac libre du liquide, A_{12} le travail nécessaire pour détacher de la plaque supérieure une colonne liquide ayant l'unité de section, et A_{13} le travail nécessaire pour détacher cette colonne de la plaque inférieure. Entre ces grandeurs et les angles constants φ_2 et φ_3, sous lesquels la surface du liquide se raccorde à la plaque supérieure et à la plaque inférieure, existent les relations connues:

$$K_1 \cos \varphi_2 = K_1 - A_{12}, \quad K_1 \cos \varphi_3 = K_1 - A_{13}.$$

Soient, en outre, h la hauteur de la goutte, O sa base supérieure et inférieure, s son poids spécifique et par conséquent shO son poids, enfin $Q = qshO$ la somme du poids de la plaque supérieure et de la charge qu'elle supporte. Si nous imaginons maintenant que la hauteur varie de la quantité dh, le moment virtuel de Q sera: $-Q dh$ ou $-qsh\, O dh$, le moment virtuel

du poids de la goutte: $-\frac{1}{2}\, s\, h\, O\, dh$. Les bases supérieure et inférieure de la goutte subissent des agrandissements déterminés par la relation:

$$O\, dh = -h\, dO.$$

Si la surface du liquide était entièrement libre, le moment virtuel des forces moléculaires, tant à la base supérieure qu'à la base inférieure, serait, d'après la proposition rappelée au début, $-K_1\, dO$, sur les deux bases $-2\, K_1\, dO$. Mais comme le liquide, en s'étendant, vient en contact avec les plaques, le moment virtuel est à la base supérieure: $-(K_1 - A_{1\,2})\, dO$, et à la base inférieure: $-(K_1 - A_{1\,3})\, dO$.

En cas d'équilibre, on a alors:

$$-\left(\tfrac{1}{2} + q\right) sh\, O\, dh - (K_1 - A_{1\,2})\, dO - (K_1 - A_{1\,3})\, dO = 0,$$

ou, en remplaçant $O\, dh$ par $-h\, dO$,

$$K_1 - A_{1\,2} + K_1 - A_{1\,3} = sh^2\left(\tfrac{1}{2} + q\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

équation à laquelle on peut substituer celle-ci:

$$K_1 \cos\varphi_2 + K_1 \cos\varphi_3 = s\, h^2\left(\tfrac{1}{2} + q\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

3. La valeur de h devient imaginaire lorsque les deux angles de raccordement φ_2 et φ_3 sont obtus. Elle le devient également lorsqu'on a: $2\, K_1 = A_{1\,2}$ ou $2\, K_1 = A_{1\,3}$, c'est-à-dire, lorsque le liquide s'étend soit sur la plaque supérieure soit sur la plaque inférieure.

Pour le mercure, entre deux plaques de verre, on a:

$$2\, K_1 \cos\varphi = s\, h^2\left(\tfrac{1}{2} + q\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

φ représentant l'angle de raccordement du mercure avec le verre.

Si la plaque supérieure est supprimée, ce qui fait disparaître $A_{1\,2}$ et q, on obtient:

$$K_1 + K_1 \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\, s\, h_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

A l'aide de ces deux dernières équations, on peut calculer la valeur de la constante moléculaire K_1 du mercure et l'angle φ, lorsque h et h_1 ont été mesurés. Elles offrent l'avantage qu'on peut multiplier les observations, en modifiant la charge.

4. Comme exemple de cette détermination, je citerai l'expérience suivante. Un poids de 132595 milligrammes de mercure distillé dans le vide fut versé sur une plaque de verre horizontale, de manière à former une goutte à contour à peu près circulaire. La hauteur de cette goutte, mesurée au moyen du sphéromètre, fut trouvée égale à $3^{mm},343$.

La goutte étant couverte d'une plaque de verre pesant 2311 milligrammes, la hauteur de la surface supérieure de la plaque au-dessus du plan horizontal sur lequel reposait la goutte était de $3^{mm},085$. Retranchant l'épaisseur de la plaque de verre, savoir $0^{mm},295$, on obtient pour la hauteur de la goutte couverte, $2^{mm},790$. On a donc:

$$h = 2,790$$
$$h_1 = 3,343$$
$$s = 13,59$$
$$q = \frac{2311}{132595} = 0,017$$

et par suite:

$$2\,K_1 \cos\varphi = 13,59 \quad (2,790)^2 \; 0,517 = 54,59$$
$$K_1 + K_1 \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \; 13,59 \quad (3,343)^2 = 75,80$$

d'où:

$$K_1 = 48,51$$
$$\varphi = 55°44'.$$

En employant des plaques de verre très minces, de sorte que leur poids soit négligeable auprès de celui de la goutte, l'aplatissement de la goutte, qui résulte de la superposition de la plaque, est encore très sensible. On trouve en effet pour $q = 0$, avec les constantes que nous venons de déterminer, $h = 2^{mm},837$. La dépression brusque d'environ un demi-millimètre qu'éprouve une large goutte de mercure au moment où elle vient en contact avec une mince lame de verre, libre de suivre le mouvement du mercure, est bien propre à illustrer l'attraction moléculaire de ces deux corps.

Dans sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire* (p. 210), Poisson, traitant le problème par la voie de l'analyse, obtient pour la

hauteur k d'une goutte entre deux plaques horizontales égales l'expression:

$$K = a\sqrt{\frac{g\varrho v \cos\omega}{\varpi}}.$$

Dans la notation de Poisson, $a^2 g\varrho$ est $=$ H, et cette dernière grandeur correspond au double de la constante moléculaire que nous avons appelée K_1. En outre, ω est l'angle de raccordement, que nous avons désigné par φ, v le volume du liquide, ϖ le poids de la plaque supérieure. Ecrite avec les notations employées par nous, l'équation de Poisson devient:

$$h = \sqrt{\frac{2 K_1 v \cos\varphi}{Q}} = \sqrt{\frac{2 K_1 \cos\varphi}{sq}},$$

tandis que nous avons trouvé:

$$h = \sqrt{\frac{2 K_1 \cos\varphi}{s(\frac{1}{2} + q)}}.$$

Mais, si l'on examine le calcul de Poisson, on voit que, dans sa formule finale, il n'a pas tenu compte du poids du liquide. Poisson obtient en effet la relation:

$$\omega = \pi g\varrho r\left[\left(\frac{a^2 \cos\omega}{k} - \frac{1}{2}k\right) r - a^2 \sin\omega\right]$$

dans laquelle il néglige ensuite les deux derniers termes du second membre. Le premier de ces deux termes, à savoir $\frac{1}{2} g\varrho\pi r^2 k$, est le demi-poids de la goutte. Le second représente l'influence qu'exerce sur la condition d'équilibre la surface libre du liquide entre les plaques. Il n'entre pas dans notre calcul, parce que nous avons supposé que le quotient de la hauteur par le rayon de la base supérieure avait une valeur insensible. Il serait facile d'ailleurs d'en tenir compte dans notre calcul.

Imaginons, en effet, que la plaque supérieure s'élève; la surface libre du liquide, entre les plaques, deviendra alors plus grande. Le point a, où le méridien de cette surface se raccorde à la plaque supérieure sous l'angle φ, s'élève de la quantité dh. Une normale abaissée de a sur le méridien dans sa position nou-

velle fait avec dh l'angle φ, et la longueur comprise entre le pied de la normale et le nouveau point de raccordement est $dh \sin\varphi$. Tel est l'agrandissement qu'éprouve le méridien. La surface entière grandit donc de $2\pi r \sin\varphi\, dh$. Le moment virtuel des forces moléculaires à la surface libre du liquide est par suite: $-2\pi r \sin\varphi K_1\, dh$ ou $\frac{2\pi r \sin\varphi K_1 h}{0} d0$, de sorte que, en le comprenant dans notre calcul, nous obtiendrons, au lieu de l'éq. (3):

$$2 K_1 \cos\varphi - \frac{2\pi r \sin\varphi K_1 h}{0} - s h^2 (\tfrac{1}{2} + q)$$

ou:

$$q s h^2 0 = 2 K_1 0 \cos\varphi - \tfrac{1}{2} s h^2 0 - 2\pi r K_1 h \sin\varphi.$$

En faisant ici $2 K_1 = H = a^2 g \varrho$, $q s h 0 = \varpi$, $h = k$, $\varphi = \omega$ et $s = g\varrho$, on obtient l'équation complète de Poisson. Dans la notation adoptée par nous, la relation (3), savoir:

$$2 K_1 \cos\varphi = s h^2 (\tfrac{1}{2} + q),$$

devrait être remplacée par celle-ci:

$$2 K_1 \left(\cos\varphi - \frac{h}{r} \sin\varphi\right) = s h^2 (\tfrac{1}{2} + q),$$

qui ne diffère de la précédente que par le très petit second terme du premier membre.

4. Représentons-nous la goutte coupée par un plan horizontal, à une distance x de la base supérieure. Soit θ l'angle que le méridien de la surface libre du liquide fait avec le plan coupant. La partie de la goutte située au-dessus du plan a alors évidemment la même forme qu'aurait une goutte de la même grandeur, couverte par la même plaque de dessus, mais qui reposerait sur une plaque horizontale avec laquelle le liquide ferait l'angle de raccordement θ. Entre θ et x il doit donc exister, d'après (2), la relation:

$$K_1 \cos\varphi_2 + K_1 \cos\theta = s x^2 (\tfrac{1}{2} + q) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Cette équation, qui fait connaître la relation entre l'angle θ, qu'un élément du méridien forme avec un plan horizontal, et la

distance x de cet élément à la base supérieure de la goutte, est l'équation différentielle de la surface.

Combinée avec l'équation (2), elle donne:

$$\frac{\cos\varphi_2 + \cos\theta}{\cos\varphi_2 + \cos\varphi_3} = \frac{x^2}{h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

7. Lorsque la plaque supérieure est supprimée, on a $A_{12} = 0$ et $\varphi_2 = 0$. L'équation de la surface devient alors:

$$\frac{(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\varphi_3)} = \frac{x^2}{h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Sur le parallèle de la plus grande largeur, l'élément du méridien est vertical et, par conséquent, $\cos\theta = 0$. En nommant a la distance de ce parallèle à la face supérieure, on a:

$$\frac{1}{1 + \cos\varphi_3} = \frac{a^2}{h^2},$$

de sorte que, au lieu de (7), on peut aussi écrire:

$$x = a\sqrt{1 + \cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

On trouve cette équation dans un Mémoire de M. Quincke [1]), où elle est déduite de la condition que la courbure moyenne, en un point quelconque, soit proportionnelle à la profondeur de ce point au-dessous de la face supérieure.

La valeur de a se déduit de la formule (4), savoir,

$$K_1 + K_1 \cos\varphi = \tfrac{1}{2} s h_1^2.$$

En y faisant $\varphi = 90$, h_1 sera la distance à la face supérieure de l'élément vertical du méridien. On a donc:

$$\frac{2\,K_1}{s} = a^2.$$

Pour le mercure, d'après l'expérience de la page 470, a serait $2^{mm},67$.

8. Concevons un tube de verre vertical d'une grande largeur plongé dans la goutte. Le tube découpera dans la goutte une portion circulaire, qui formera avec les parois du tube l'angle

[1]) Pogg. *Ann.*, CXXXIX, p. 6.

de raccordement φ. Le mercure intérieur présentera la forme de la partie supérieure d'une large goutte de ce metal, depuis son sommet jusqu'au parallèle où l'élément du méridien forme un angle égal à φ avec la verticale, ou un angle $90 + \varphi$ avec l'horizon. En substituant cette dernière valeur à θ dans la formule (8), ou à φ dans la formule (4), on obtient pour la distance d de ce parallèle au sommet de la goutte:

$$d = a\sqrt{1 - \sin\varphi} = \sqrt{\frac{2\,K_1}{s}(1 - \sin\varphi)}.$$

Cette formule donne la hauteur du ménisque dans des tubes très larges, ou la dépression d'une surface mercurielle en contact avec une paroi de verre.

9. Si le liquide n'éprouve aucune espèce d'attraction de la part des deux plaques, c'est-à-dire, si l'on a à la fois $A_{1\,2}$ et $A_{1\,3} = 0$, on trouve:

$$2\,K_1 = \tfrac{1}{2}\,s h^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(9)$$

$$K_1 = \tfrac{1}{2}\,s a^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(10)$$

d'où il suit:

$$h = a\sqrt{2}.$$

Ce cas est réalisé dans l'expérience de Leidenfrost, où une goutte à l'état sphéroïdal repose sur un coussin de vapeur et où les bases supérieure et inférieure sont toutes les deux horizontales. On obtient une goutte d'air renversée de la même forme, en laissant monter une bulle d'air dans un liquide jusqu'à la rencontre d'une plaque horizontale que le liquide humecte parfaitement. C'est à peu près dans ce cas que se trouve la bulle d'air d'un niveau dit à boîte. La surface commune du liquide et de l'air se raccorde alors par un angle $= 0$ à la plaque horizontale mouillée. Les deux relations simples (9) et (10) fournissent un moyen de déterminer la constante K_1 par la mesure de a ou de h. M. Quincke s'est servi de ce moyen, mais en faisant usage seulement de la relation entre a et K_1. Cependant les mesures de la hauteur totale de la bulle d'air offrent plus de garanties d'exactitude que les mesures de la distance verticale entre le parallèle

de plus grande largeur et le point le plus bas de la bulle. Effectivement, en prenant la première de ces deux grandeurs pour base du calcul, on trouve un accord plus grand avec la valeur de la constante moléculaire, telle qu'elle a été déduite par M. Quincke de la hauteur d'ascension dans les tubes capillaires; c'est ce que montrent les chiffres suivants calculés d'après les données des expériences de M. Quincke:

	Constante moléculaire déduite:		
	de la hauteur d'ascension.	de *h*.	de *a*.
Hyposulfite de soude . .	7,636	7,571	7,903
Eau	7,235	7,352	8,253
Sulfure de carbone . . .	3,343	3,026	3,274
Huile d'olive.	3,271	3,625	3,260
Essence de térébenthine	2,765	2,715	3,033
Pétrole	2,566	2,916	3,233
Alcool	2,237	2,479	2,995

SUR

UN CAS DE DISCONTINUITÉ,

PAR

L. COHEN STUART.

Beaucoup de mathématiciens admettent tacitement, et quelques-uns l'énoncent en termes formels, que si, x variant d'une manière continue, $f(x)$ change subitement de valeur, cela implique toujours, pour la fonction dérivée $f'(x)$, une rupture de continuité, à savoir, par le passage à l'infini; en conséquence, que $\int_a^b f'(x)\,dx$, regardé comme la valeur que prend $\Sigma\, f'(x)\,\Delta x$ lorsque x croît de a à b et que Δx tend indéfiniment vers zéro, pourrait être posé égal à $f(b) - f(a)$, aussi longtemps que $f'(x)$ reste fini.

Un exemple, propre à montrer que cela n'est pas vrai d'une manière absolument générale, et donnant d'ailleurs lieu à des remarques qui méritent peut-être quelque attention, est fourni par la discontinuité de $f(x) = e^{-e^{\frac{1}{x}}}$ (comme cas particulier de $r^{-s^{\frac{1}{x}}}$) pour $x = 0$.

Pour δ positif et tendant indéfiniment vers 0, on a $f(-\delta) = 1$ et $f(\delta) = 0$; néanmoins on trouve, sans aucune discontinuité:

$$f'(x) = e^{-e^{\frac{1}{x}}}\, e^{\frac{1}{x}}\, x^{-2}, \qquad f'(-\delta) = f'(\delta) = 0.$$

En outre, bien que $f'(x)$ reste fini,

$$\int_{-a}^{b} f'(x)\,dx = \int_{-a}^{-\varepsilon} f'(x)\,dx + \int_{\varepsilon'}^{b} f'(x)\,dx,$$

pour a et b positifs et ε et ε' positifs et tendant indéfiniment vers 0, n'est pas égal a $f(b) - f(-a)$, mais égal à $f(b) - f(-a) + 1$.

La marche de la courbe $y = f(x)$ est représentée par la fig. 1 (Pl. XIV), où $0\,A = 1$; celle de la courbe $y = f'(x)$, par la fig. 2. Les deux branches de la courbe $y = f(x)$ ont la ligne $y = \frac{1}{e} = 0E$ pour asymptote; comme il est facile de reconnaître que $\frac{1 - f(-\delta)}{\delta^n}$ et $\frac{f(\delta)}{\delta^n}$, quelque grand que soit n, approchent indéfiniment de 0 en même temps que δ, ces branches ont, pour $x = 0$, respectivement avec les lignes $y = 1$ et $y = 0$, un contact de l'ordre ∞. La courbe $y = f'(x)$ a la ligne $y = 0$ pour asymptote, et présente également avec celle-ci, pour $x = 0$, un contact de l'ordre ∞.

A droite et de même à gauche de l'axe des y, on a: aire $m\,\mu'\,n\,\nu'$ (fig. 2) $= n\,\nu - m\,\mu$ (fig. 1); c'est-à-dire:

$$\int_{m}^{n} f'(x)\,dx = f(n) - f(m).$$

Par contre, on a: aire $a\,\alpha'\,b\,\beta' = (0\,A - a\,\alpha) + (b\,\beta - 0) = b\,\beta - a\,\alpha + 1$; c'est-à-dire, comme il a été remarqué plus haut,

$$\int_{-a}^{b} f'(x)\,dx = f(b) - f(-a) + 1.$$

Le rapport entre la différence des ordonnées de la courbe $y = f(x)$ et l'aire déterminée par les ordonnées correspondantes de la courbe $y = f'(x)$, rapport qui est ici rompu, se laisse

remplacer par un autre. Si l'on remarque que $0E - b\beta$ est égal à l'aire qui s'étend à l'infini à droite de $b\beta'$, et $a\alpha - 0E$ égal à l'aire qui s'étend à l'infini à gauche de $a\alpha'$, on reconnaît que $a\alpha - b\beta$ est égal à la somme des aires à droite de $b\beta'$ et à gauche de $a\alpha'$; c'est-à-dire:

$$f(-a) - f(b) = \int_b^{+\infty} f'(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-a} f'(x)\,dx,$$

expression pour laquelle on serait aisément tenté d'écrire:

$$f(-a) - f(b) = \int_b^{-a} f'(x)\,dx \;\; (b, \pm\infty, -a).$$

La possibilité, là où la différence des valeurs de l'intégrale indéfinie perd sa signification ordinaire d'intégrale définie, de faire apparaître cette différence de la manière indiquée, se présente fréquemment. De $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \text{const.}$ on ne peut pas conclure $\int_{-}^{1} \frac{dx}{x^2} = -2$, mais on a bien $2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

Chaque fois que pour toutes les valeurs de $x < x_1$, on a $\int_x^{x_1} f(x)\,dx = f(x_1) - f(x)$, et pour toutes les valeurs de $x > x_2$ $(x_2 > x_1)$, $\int_{x_2}^{x} f'(x)\,dx = f(x) - f(x_2)$, et que, en outre, $f(-x)$ et $f(x)$ tendent indéfiniment vers la même limite lorsque x croît indéfiniment, — chaque fois qu'il en est ainsi, on a, en dépit de toute rupture de continuité entre x_1 et x_2:

$$f(x_1) - f(x_2) = \int_{x_2}^{+\infty} f'(x)\,dx + \int_{-\infty}^{x_1} f'(x)\,dx \quad \ldots \quad (1)$$

En effet, h étant $< x_1 < x_2 < k$, si pour x compris entre h et x_1 on a $\int\limits_{x}^{x_1} \varphi'(x)\,dx = \varphi(x_1) - \varphi(x)$, et pour x compris entre x_2 et k, $\int\limits_{x_2}^{x} \psi'(x)\,dx = \psi(x) - \psi(x_2)$, et en outre $\varphi(h) = \psi(k)$, on a d'une manière tout à fait générale l'équation identique

$$\varphi(x_1) - \psi(x_2) = \psi(k) - \psi(x_2) + \varphi(x_1) - \varphi(h)$$

$$= \int\limits_{x_2}^{k} \psi'(x)\,dx + \int\limits_{h}^{x_1} \varphi'(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dont l'équation (1) ne forme qu'un cas particulier.

Si, dans le cas de l'équation (1), on remplace x par $\frac{1}{z}$, et qu'on pose $f(x) = F(z)$, on a, pour le cas où ξ_1 et ξ_2 sont tous les deux $> x_2$ ou tous les deux $< x_1$,

$$f(\xi_2) - f(\xi_1) = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f'(x)\,dx,$$

et pour $\xi_1 < x_1$ et $\xi_2 > x_2$, en posant $\frac{1}{\xi_1} = \zeta_1$ et $\frac{1}{\xi_2} = \zeta_2$,

$$f(\xi_2) - f(\xi_1) = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} F'(z)\,dz.$$

Il ne faut toutefois voir dans ces équations que ce qui s'y trouve réellement, — une simple conséquence de l'identité (2) et de la circonstance, fréquente il est vrai, mais pourtant accessoire et en quelque sorte accidentelle, qu'on a $f(-\infty) = f(+\infty)$.

Si, abstraction faite de cette circonstance spéciale, on veut, pour la fonction ci-dessus considérée, rendre à $f(b) - f(-a)$

le caractère d'intégrale définie de $f'(x)\,dx$ et supprimer la discontinuité, on a pour cela un moyen bien connu.

On remplacera x par $\varrho(\cos\omega + i\sin\omega)$, et on intégrera par rapport à ϱ et ω, en évitant $\varrho = 0$, entre les limites $\varrho = a$, $\omega = (2k+1)\pi$ et $\varrho = b$, $\omega = 2k'\pi$, où k et k' sont des nombres entiers.

C'est ainsi, par exemple, que pour $a = b = 1$, si l'on prend $\varrho = \text{const.} = 1$, on a, sans aucune discontinuité ni équivoque:

$$f(x) = \mathrm{P}(\cos \mathrm{U} + i \sin \mathrm{U}) = \varphi(\omega),$$

où

$$\mathrm{P} = e^{-e^{\cos\omega}\cos(\sin\omega)}\,;\quad \mathrm{U} = e^{\cos\omega}\sin(\sin\omega)\,;$$

et $$f'(x)\,dx = \mathrm{Q}(\cos \mathrm{V} + i\sin \mathrm{V})\,d\omega = \varphi'(\omega)\,d\omega,$$

où

$$\mathrm{Q} = e^{\cos\omega - e^{\cos\omega}\cos(\sin\omega)},\quad \mathrm{V} = \frac{\pi}{2} - \omega - \sin\omega + e^{\cos\omega}\sin(\sin\omega)\,;$$

et

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{2(k+1)\pi}^{2k'\pi} \varphi'(\omega)\,d\omega$$

$$= \varphi(2k'\pi) - \varphi\big((2k+1)\pi\big)$$

$$= e^{-e} - e^{e^{-1}}$$

$$= f(1) - f(-1).$$

Fig. 1.

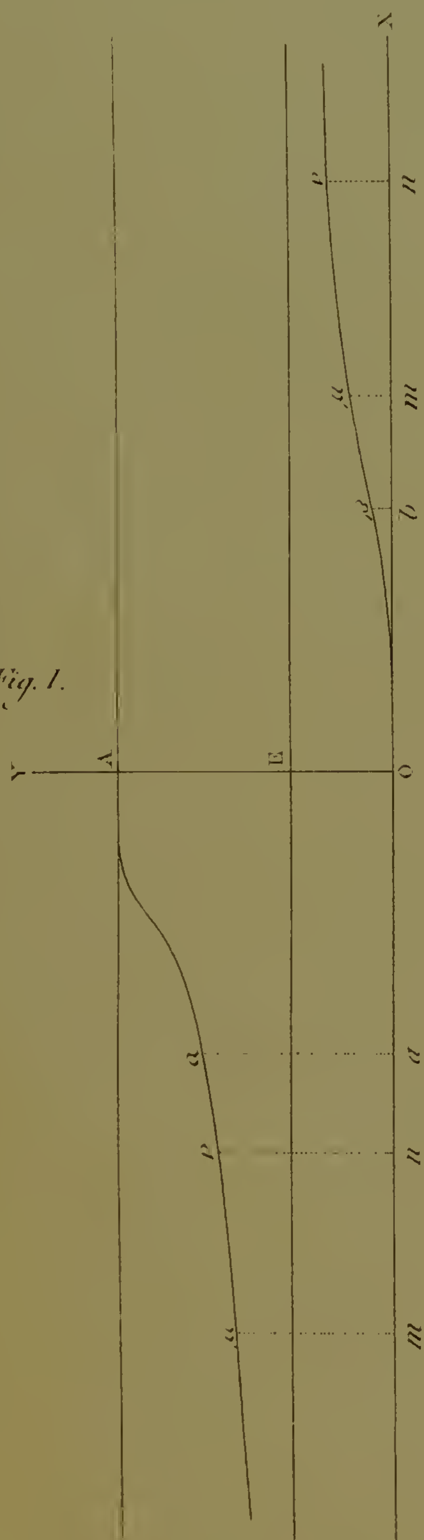


Fig. 2.

